Un modèle dynamique de comportement d'une entreprise

Philippe Dulbecco, Jean-Luc Gaffard, Philippe Laurent, Juliette Leblond, Jean-Baptiste Pomet

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Un modèle dynamique de comportement d'une entreprise

Philippe Dulbecco, Jean–Luc Gaffard, Philippe Laurent, Juliette Leblond,
Jean–Baptiste Pomet

N° 2660

Septembre 1995

PROGRAMME 5

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Un modèle dynamique de comportement d'une entreprise

Philippe Dulbecco*, Jean–Luc Gaffard**, Philippe Laurent***, Juliette Leblond****, Jean–Baptiste Pomet****

Programme 5 — Traitement du signal, automatique et productique
Projet MIAOU

Rapport de recherche n° 2660 — Septembre 1995 — 71 pages

Résumé : Ce travail consiste en l'élaboration, l'étude et la simulation numérique d'un modèle dynamique de comportement des entreprises. Celui–ci permet d'appréhender les réactions d'une entreprise soumise à des changements structurels de son environnement et son adaptation à ces changements, question déterminante en économie et stratégie d'entreprise. Cette étude s'est déroulée dans le cadre d'un projet de recherche commun INRIA (projet MIAOU) - LATAPSES (CNRS, Laboratoire d'Analyse des Transformations de l'Appareil Productif et des Stratégies Economiques Sectorielles).

(Abstract: pto)

*. ECT, 93 chemin des Mouilles, 69130 Ecully, FRANCE
**. LATAPSES, CNRS, 06902 Sophia–Antipolis Cedex, FRANCE
***. LATAPSES, INRIA Sophia–Antipolis
****. INRIA Sophia–Antipolis, {leblond}{pomet}@sophia.inria.fr

Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis
2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex (France)
Téléphone : (33) 93 65 77 77 – Télécopie : (33) 93 65 77 65

A dynamic model of the behaviour of a firm

Abstract: This work consists in setting–up, studying, and simulating a dynamic model of the behaviour of a firm. This model shows the reactions of a firm in front of structural changes of its environment and its adaptation to these changes, an important issue in economic sciences and firm strategy. This study has been done in the context of a common research project INRIA (projet MIAOU) - LATAPSES (CNRS).

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Vers une théorie dynamique de l'entreprise

Il existe bien, comme le rappelle opportunément B.Carlsson (1989;1993) deux traditions en économie industrielle.
La première, qui correspond à la théorie traditionnelle de la firme et des marchés et que B.Carlsson nomme théorie de l' *Organisation Industrielle*[1] a pour vocation de traiter de problèmes essentiellement statiques. L'unité d'analyse est le secteur; les comportements d'entreprise sont simples, i.e. conditionnés par les configurations des structures industrielles, et orientés par des critères d'efficacité statique.
P.J.McNulty (1984) explique à ce propos que la théorie économique standard s'est constamment développée autour d'un axe marché-allocation en négligeant de considérer la question de la nature de la firme et de son rôle au sein du processus économique. La prédominance en analyse économique de la problématique de l'allocation et des travaux relatifs à la concurrence sur le marché s'est ainsi accompagnée d'une mise à l'écart de la production -dans le sens d'un

1. L'Organisation Industrielle inclut aussi bien le paradigme Structure-Comportement-Performance, la micro-économie moderne de la concurrence imparfaite et la théorie des marchés contestables, que la théorie néo-classique de l'entreprise.

processus de transformation quantitative et qualitative des ressources- et avec elle de la firme en tant que lieu de cette transformation.
L'entreprise est, dès lors, appréhendée comme l'unité élémentaire des processus d'allocation des ressources sur des marchés concurrentiels; son rôle est réduit à la fonction de production qui respecte le postulat d'efficience technologique. Cette conception de l'entreprise est qualifiée de statique, dans la mesure où elle suppose des facteurs de production et un ensemble de choix -une technologie- donnés, ce qui conduit à nier toute spécificité à l'entreprise et, avec elle, au processus de production. Si changement il y a, ce dernier est réduit à une succession d'états d'équilibres résultant de calculs d'optimisation inter-temporels. La théorie statique de l'entreprise est, en bref, une théorie de régime régulier qui suppose que la firme est constamment à l'équilibre.
La seconde tradition, résolument alternative est celle de la *Dynamique Industrielle*[2]. Elle est fondamentalement concernée par l'étude des processus de changement technologique et de transformation de l'environnement industriel (CARLSSON,1989;1993). L'entreprise et les conditions de la production se situent au centre de l'analyse; les comportements sont orientés par la recherche de viabilité.
Or, la théorie de l'entreprise sous-jacente aux travaux de cette seconde tradition, i.e. une *théorie dynamique de l'entreprise* est, il faut bien en convenir, encore à développer. En effet, on ne dispose pas vraiment aujourd'hui d'une structure analytique suffisamment générale qui permette d'appréhender et de modéliser l'éventail des comportements de firmes hors de l'équilibre. Une telle théorie doit selon nous respecter les trois caractéristiques suivantes :
(i) elle doit d'abord être une théorie de la création de ressources – l'entreprise est un agent de la production de richesses,
(ii) elle doit ensuite intégrer la dimension temporelle du processus de production,
(iii) elle doit enfin décrire des comportements hors de l'équilibre (hors de régimes réguliers).
L'objet de ce qui suit est alors assez naturellement, de proposer les bases d'une construction analytique qui s'articulerait autour de ces trois axes.

2. Cette tradition puise son inspiration chez A.Smith (1776), K.Wicksell (1935), J.B.Schumpeter (1934;1942), F.V.Hayek (1937;1945); elle regrouperait évolutionnistes, néo-institutionnalistes et néo-autrichiens.

Partant de l'hypothèse -du constat- que l'économie fonctionne toujours en déséquilibre (DAY,1975;1987;1993) (BATTEN,CASTI,JOHANSSON,1987), il s'agit pour nous de dégager une topographie des comportements de firmes hors de l'équilibre c'est à dire de déterminer *comment et sous quelles conditions des agents imparfaitement informés et confrontés à des contraintes internes spécifiques, se coordonnent et s'ajustent à un système externe – environnement – en dehors de situations d'équilibre* (DAY,1975). Notre champ d'investigation est celui de l'économie des comportements adaptatifs ("adaptative economics") i.e de l'analyse des ajustements des agents à leur environnement fondés sur l'imitation, l'apprentissage, les habitudes et l'expérimentation (DAY,1975,1987).

Ainsi, après avoir souligné l'intérêt de recourir dans cette perspective à ce qu'il est convenu d'appeler une représentation néo-autrichienne de l'entreprise, nous exposerons les principes généraux d'un modèle dynamique d'évolution de la capacité productive de la firme (chapitre 2) et expliciterons les conditions de la stabilité autour de l'équilibre d'un tel modèle (chapitre 3). Nous pourrons alors nous livrer à une étude du comportement de l'entreprise en dehors de l'équilibre afin d'identifier la variété des sentiers d'adaptation suivies par des entreprises soumises à des modifications brutales de leur environnement économique, de leur marché (chapitre 4). En conclusion, nous exposerons les enjeux et les perspectives d'une généralisation du modèle de base.

1.2 L'analyse néo-autrichienne de la production: quelques repères

Si l'on suit N.Georgescu-Roegen (1970;1971) chaque processus de production est représenté par une relation du type $Q(t) = [E_i(t), S_j(t)]$ où $Q(t)$ représente le produit final, $E_i(t)$ les coordonnées des facteurs de flux et $S_j(t)$ les coordonnées des facteurs de fonds. Ces coordonnées sont des fonctions du temps; elles sont définies sur un intervalle $[0;T]$ qui correspond à la durée réelle du processus. La différence entre les facteurs de flux et les facteurs de fonds est que les premiers apparaissent uniquement en tant qu'"inputs" ou "outputs" du processus de production, alors que les seconds sont maintenus intacts par le processus; ils apparaissent à la fois comme inputs et comme outputs. Les flux qui apparaissent généralement comme inputs sont les ressources naturelles R, les consommations intermédiaires (qui viennent d'autres processus de production) I, et les ressources de maintenance M ; ceux qui apparaissent comme output sont naturellement les produits Q, auxquels il convient de rajouter les déchets W. Les fonds désignent principalement la terre L, le capital physique K, et les ressources humaines H. Ceci étant spécifié, il est possible de donner une représentation plus complète du processus de production :

$$Q(t) = [R(t), I(t), M(t), W(t); L(t), K(t), H(t)], 0 \leq t \leq T.$$

Cette relation ne représente pas un ensemble de techniques efficaces, mais un processus de production particulier caractérisé par la qualité de ses facteurs de fonds.

Le point important est ici que les facteurs considérés ne sont pas substituables mais complémentaires – les fonds ont des qualités différentes – ce qui signifie que toute modification du processus de production ne peut être réalisée instantanément mais est soumise à des effets de complémentarités inter–temporelles, les facteurs de fonds spécifiques de chaque processus n'étant pas accumulables ou "désaccumulables" comme le sont les stocks de marchandises, c'est-à-dire à n'importe quelle vitesse. La conséquence en est qu'il est nécessaire, en dehors bien sûr d'états réguliers qui supposent une parfaite synchronisation entre l'utilisation de la capacité productive et sa construction, de prendre en compte l'idée que l'activité de production est orientée vers deux objectifs distincts : produire des biens certes, mais également produire des processus, i.e. qu'il est indispensable de construire les processus qui permettront d'obtenir les marchandises.

Ce faisant, le travail de N.Georgescu-Roegen alerte sur la nécessité d'étudier de plus près la chronologie des processus de production.

Ceci constitue l'un des principaux objet de l'analyse hicksienne de la production telle qu'elle est développée par la méthode des processus élémentaires séparables (HICKS,1970;1973). Cette dernière présente l'avantage de clairement distinguer la construction et l'utilisation de la capacité productive en associant à la première uniquement des dépenses et à la seconde des dépenses et des recettes. J.R.Hicks définit en effet un processus de production comme la combinaison grâce à laquelle un flux de facteurs se transforme en un flux de produit soit, en simplifiant, comme un mécanisme de conversion d'inputs de

travail en produit final. La phase de construction implique la mise en oeuvre de facteurs de production sans qu'il y ait de produit final. Elle est logiquement suivie d'une phase d'utilisation ou de production proprement dite, pendant laquelle les facteurs de production sont uniquement utilisés pour faire fonctionner les équipements précédemment construits. Si la dimension temporelle du processus de production n'a pas de véritable importance en situation de régime permanent (dans la mesure où les coûts sont instantanément couverts par les recettes), tel n'est évidemment plus le cas lorsque l'on sort de ce cas bien particulier pour considérer des situations normales dans lesquelles de nouveaux processus de production se substituent aux anciens.
La firme doit alors faire face à un problème de gestion temporelle de ses activités et de ses ressources dans la mesure où elle ne pourra bénéficier de ses engagements que sur un horizon temporel relativement lointain (RICHARDSON,1990,pp.143-46). En effet, la construction de processus de production nouveaux n'est pas instantanée. Cette construction est comme nous l'avons déjà évoqué soumise à des délais, principalement *un délai de transmission* de l'information aux firmes[3] ("concurrentes" et "partenaires") et un *délai de construction* proprement dit ou *délai de gestation* avant que l'engagement ne se traduise effectivement par la production d'outputs (ibid., pp.50-51). Qui plus est, ces délais sont accrus par le fait que la construction d'un nouveau processus n'implique pas que l'ensemble des engagements, des investissements requis, soient réalisés de manière simultanée; on assiste plutôt, assez logiquement, à une articulation temporelle séquentielle des différentes phases de cette construction (ibid.,p.75).
Les notions de courte et de longue période perdent évidemment dans un tel contexte beaucoup de leur signification; le temps est désormais historique, toute action qui est prise en un point du temps aura des conséquences sur toute la période considérée, i.e. celle de la durée de vie de l'entreprise. C'est la

3. Toute firme qui modifie sa capacité de production que ce soit en termes quantitatifs ou/et qualitatifs doit, assez logiquement, tenir compte du fait que cette modification, i.e. cet investissement est à la fois complémentaire et concurrent d'autres investissements qui sont, ont été ou seront réalisés dans l'économie par d'autres entreprises. Tout investissement sera en règle générale générateur de profit, premièrement si le volume des investissements concurrents ne dépasse pas une limite critique conforme à la demande pour le produit, et deuxièmement, si celui des investissements complémentaires atteint un seuil minimal (RICHARDSON,1990,p.31).

dimension transformation du temps qui devient déterminante dans le sens où la firme a pour obligation de contrôler sa propre transformation par l'adoption d'un comportement qui garantisse ses objectifs de survie et de croissance en fonction de la contrainte temporelle[4]
Cette contrainte est rendue encore plus prégnante par le fait que les engagements pris par la firme sont par ailleurs, très fortement susceptibles d'entraver sa flexibilité et sa faculté d'adaptabilité (ibid.,p.79). G.B.Richardson indique en effet que tout processus de production se doit, pour être véritablement efficace, de présenter un fort degré de spécialisation (ibid., p.79) ; or la spécialisation n'est précisément que le contraire, que le "*sacrifice de l'adaptabilité*" (ibid.,p.151). L'entreprise industrielle est soumise à un dilemme de spécialisation-adaptabilité/versatilité (ibid.,p.152), spécialisation médiatisée par ses engagements dans la construction de processus de production nouveaux et spécifiques, porteurs d'opportunités de profit, adaptabilité/versatilité requise par l'incertitude et le risque inhérents à toute activité économique. Le dilemme de la spécialisation-adaptabilité n'est en réalité rien de moins qu'une (autre) formulation de la contradiction créée par l'existence de coûts irrécupérables : tout investissement porteur d'opportunité de profit doit présenter un caractère spécifique et donc irréversible (qui se traduit donc par des coûts irrécupérables élevés) incompatible avec une exigence d'efficacité et de profitabilité à long

4. W.Lazonick explique dans une même perspective que "*l'investissement ne crée pas en lui-même de valeur*" et que si de nombreuses entreprises "*investissent dans des ressources productives avec l'objectif de créer de la valeur, un grand nombre d'entre elles échouent*" (LAZONICK,1991,p.93). Les investissements productifs, une fois engagés, engendrent en effet des coûts fixes qui seront recouvrés à l'issu du processus de production, une fois le produit vendu ; "*l'investissement de l'entreprise représente un engagement financier sur un processus de production spécifique afin de réaliser un produit particulier qui doit donner lieu à des revenus futurs. Une fois engagé, l'actif productif se traduit par des coûts fixes qui seront recouverts par la production et la vente du bien considéré. Si les rendements financiers issus de la vente sont simultanés à l'investissement, le problème des coûts fixes n'existe pas. Mais si tel est le cas les notions mêmes d'investissement et d'entreprise perdent de leur pertinence. Le problème des coûts fixes apparaît parce que la production et la vente ne sont pas instantanées; il existe un intervalle de temps entre le moment où une entreprise investit et celui où elle récolte les fruits de cet investissement*" (LAZONICK,1992,p.9). "*Le challenge de base auquel est confronté l'entreprise capitaliste est par conséquent de transformer les coûts fixes inhérents à ses investissements en revenus issus de la vente des produits fabriqués sur la base de cet investissement (...) c'est-à-dire créer de la valeur...*" (LAZONICK,1991,p.92).

terme qui implique pour la firme la capacité d'être mobile, c'est-à-dire d'élargir ou de modifier la gamme de ses activités.
L'étude de la stratégie de la firme implique alors de considérer que cette dernière établit constamment un compromis entre ses objectifs de courte et de longue période.
Pour J.R.Hicks (1954), cela se traduit formellement par le fait que l'entreprise maximise une combinaison de profit de court terme et de long terme : $l\,g+m\,G$, si g désigne le montant du profit de court terme, G celui de long terme, l et m des paramètres rendant compte d'un certain nombre d'éléments suggestifs et spécifiques à chaque entreprise tels que la durée anticipée de chacune des périodes, le taux de préférence temporelle et l'attitude à l'égard du risque[5].
La prise en compte de ces éléments subjectifs permet à J.R.Hicks de spécifier deux grands types de comportement d'entreprise: le "*Sticker*" et le "*Snatcher*" (ibid.,p.168). Alors que l'entrepreneur *Snatcher* est motivé par l'obtention de profits rapides – la valeur de l est relativement plus élevée que celle de m, le *Sticker* est davantage intéressé par la construction d'une activité stable et pérenne – la valeur de m est plus forte que celle de l.
Cette analyse bien que sommaire en appelle une autre. En effet la prise en considération du caractère temporel de la production suggère une étude des comportements micro–économiques séquentiels, dans laquelle l'entreprise effectuerait ses choix étapes après étape en tenant compte précisément de l'articulation en plusieurs périodes de la production. L'objectif étant de dégager des configurations de sentiers d'adaptation optimaux de firmes soumises à des modifications non – ou mal – anticipées de leur environnement économique. La nature des sentiers suivis est certes fonction de l'intensité du choc subi de même que de l'attitude de la firme à l'égard des profits, mais dépend aussi d'autres facteurs au premier titre desquels ceux régissant sa capacité organisationnelle, i.e. la forme et la nature des relations que l'entreprise entretient

5. En désignant les grandeurs de courte période par des lettres minuscules et celles de longue période par des lettres capitales, l'expression complète du profit est donnée par : $lg+mG = l(r-c)+m(R-C)$, avec r et R le revenu total anticipé par unité de temps, c et C les coûts totaux par unité de temps – ces derniers sont alloués différemment sur les deux périodes en fonction de la stratégie privilégiée par chaque firme. Le montant de produit x et X qui maximise ce profit est ainsi donné par l'annulation des dérivées partielles de l'expression du profit par rapport à x et X, soit respectivement: $l(r_x-c_x)+m(R_x-C_x) = 0$ et $l(r_X-c_X)+m(R_X-C_X) = 0$.

principalement avec ses partenaires économiques (sous-traitant, banques, ...) et ses concurrents (relation de coopération par exemple).
C'est dans cette perspective générale que doit être appréhendé le modèle qui suit.

Chapitre 2

Le modèle dynamique

2.1 Description générale du modèle

Le but de ce modèle est de représenter le comportement dynamique d'une entreprise dans un milieu extérieur, le marché. Le marché lui-même est un système dynamique très complexe, dont l'entreprise fait d'ailleurs en toute rigueur partie. Comme on veut s'interesser au comportement d'une entreprise, on va la modéliser séparément du marché. On obtient ainsi deux systèmes dynamiques, interconnectés au sens ou certaines variables de l'un (que l'on appelle alors des *sorties* de ce système) influent sur le comportement de l'autre (elles sont alors des *entrées* de cet autre système). Très grossièrement, cela donne la figure 2.1.
En fait, le comportement de l'entreprise dépend – sur un pas de temps donné – de son état au début de ce pas de temps, du comportement du marché pendant ce pas de temps et des décisions prises, au sein de l'entreprise, par ses dirigeants. La représentation de la figure 2.1 ne mentionne pas ces dirigeants et leurs décisions. Il est très naturel en fait de séparer la boite *Entreprise* de la figure 2.1 en deux blocs distincts comme sur la figure 2.2. L'un, que l'on appelle à nouveau *Entreprise*, représente l'entreprise, mais vue comme entité autonome, dissociée de ses dirigeants ; l'état de ce système sera donné par :

- la capacité de production (multi–dimensionnelle, représentant les quantités de projets industriels à différents stades de maturation),

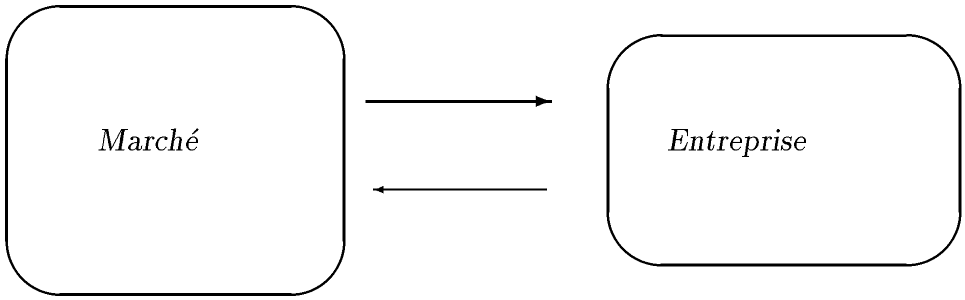


FIG. 2.1 - *L'entreprise et son environnement*

- le stock,
- le bilan financier,

et le modèle d'évolution correspond à un bilan sur le pas de temps choisi. Comme les gestionnaires de l'entreprise ne figurent pas dans ce système, toutes les variables dont les valeurs sont issues de leurs décisions :

- les salaires,
- les prix,
- le nombre de projets déclassés,
- le nombre de projets mis en chantier,

figurent en *entrée* de ce système, ainsi que la demande à la firme, qui, elle est une sortie du système *Marché*. Le troisième système – *Décisions de l'entreprise* – doit refléter la stratégie de l'entreprise. Les sorties de ce systèmes sont les variables de décisions évoquées ci-dessus (salaires, prix, nombre de projets déclassés, nombre de projets mis en chantier...) et les entrées de ce système sont les informations disponibles pour prendre des décisions : une connaissance imparfaite du marché (des observations passées de la demande) et une connaissance parfaite de l'état de l'entreprise elle–même.
On obtient, pour résumer, le classique shéma-bloc de théorie des systèmes de la figure 2.2, où chaque bloc figure un "système" au sens de l'automatique. On

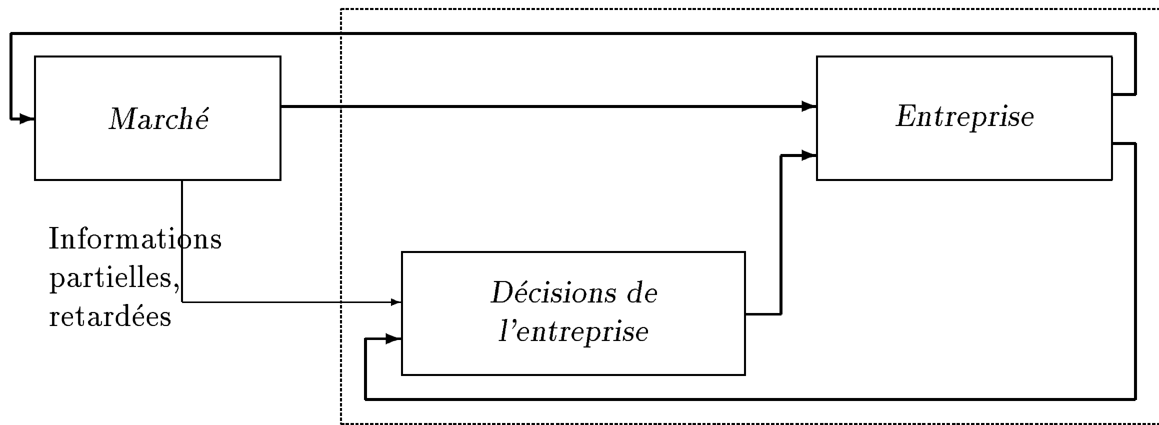


FIG. 2.2 - *Les trois systèmes interconnectés: les deux systèmes dans le cadre de droite forment l'entreprise à proprement parler, le reste son environnement.*

note qu'un système peut modéliser aussi bien une prise de décision (comme le bloc *Décisions de l'entreprise*) qu'une évolution presque physique (le bloc baptisé *Entreprise* évolue selon des lois qui ne sont que des bilans, un peu comme une réaction chimique), ou un mélange des deux comme le bloc *Marché*. Les flèches indiquent la circulation de l'information, c'est a dire qu'une flèche arivant dans un système (une entrée de ce système) indique une ou des variables dont la valeur influe sur le comportement du système, qu'il s'agisse d'informations utilisées pour prendre des décisions ou de variables qui influent plus mécaniquement sur l'évolution.
Du point de vue de l'automatique, on peut considérer le système *Entreprise* comme le système à commander, sur lequel influent les signaux issus du marché, considérés comme des perturbations (ceci ne signifie pas que le marché soit peu important !), et des commandes issues du contrôleur, ou rétro-action qu'est le système *Décisions de l'entreprise*.
Dans ce travail, nous divisons le système *Décisions de l'entreprise* en deux parties : l'une – *Aide à la décision* – est un système qui calcule une anticipation de la demande tandis que l'autre partie – *Contrôleur* – est un système qui prend, en se fondant sur cette anticipation, toutes les autres décisions. La raison de cette distinction est que l'on va peu remettre en cause l'anticipation de la demande, et mettre l'accent sur l'étude *Contrôleur* qui reflète les options des

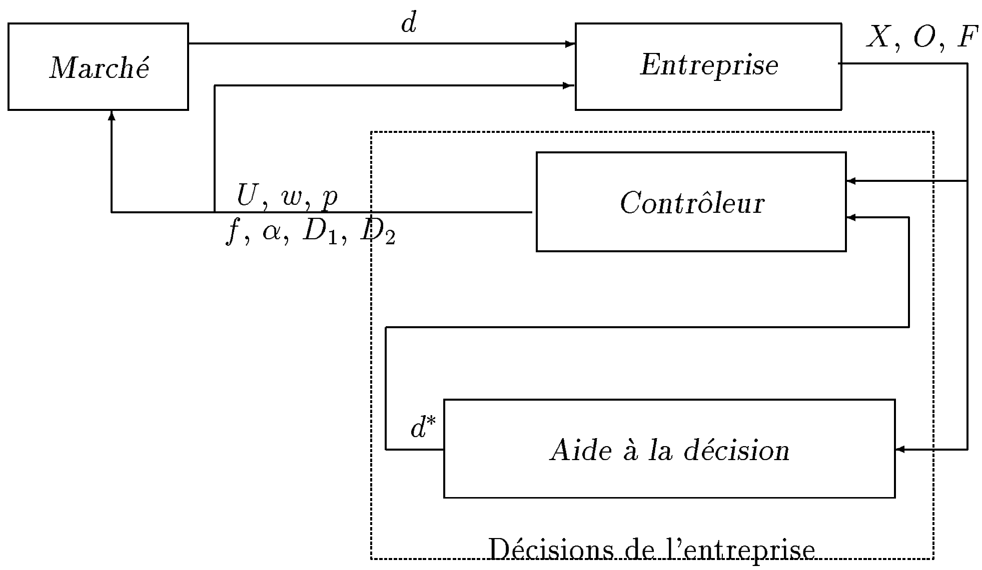


FIG. 2.3 - *Entreprise dans son milieu représentée par quatre systèmes interconnectés*

dirigeants quant à la gestion de l'outil de production. On obtient alors le shéma de la figure 2.3, plus détaillé que le précédent, et qui décrit les quatre systèmes distincts qui vont être étudiés puis simulés. Ces systèmes sont l'entreprise, le marché (qui est un système externe à l'entreprise et sur lequel elle n'a aucun contrôle), le contrôleur (qui représente les dirigeants de l'entreprise) et un mécanisme d'aide à la décision (qui par des méthodes d'anticipation adaptative oriente les décisions prises par le contrôleur). C'est l'interconnexion de ces quatre systèmes qui représente le fonctionnement d'une entreprise commandée par ses dirigeants dans un environnement de marché spécifié.
Les variables apparaîssant sur la figure 2.3 sont décrites dans les paragraphes suivants.
Tout le modèle est basé sur l'hypothèse importante et provisoire que l'entreprise ne fabrique qu'un seul type de produit.

2.2 Le système *Entreprise*

Il s'agît là du système modélisant la dynamique de l'entreprise à proprement parler, comme indiqué en section 2.1.

2.2.1 Les variables d'état

L'entreprise considérée à la période (ou pas de temps) $t \geq 0$ est fondamentalement décrite par :

- $F(t)$: la quantité d'argent dont dispose l'entreprise en fin de période t,
- $O(t)$: le stock en fin de période t,
- sa capacité de production symbolisée par le vecteur des processus :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n+N}(t) \end{bmatrix},$$

  où :
  * $n+1 \geq 1$ est la durée de développement d'un processus avant qu'il ne produise, encore appelée "délai de construction ou de gestation" (voir section 1.2),
  * $N \geq 1$ est la durée maximum de production d'un processus,
  * $x_i(t)$, $0 \leq i \leq n+N$ est le nombre de processus âgés de i périodes à la période t.

L'état de l'entreprise à la période t est donc représenté par le vecteur suivant de $\mathbb{R}^{n+N+3}$:

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ O(t) \\ F(t) \end{bmatrix}.$$

On veillera à ce que les variables d'état satisfassent les contraintes naturelles suivantes :

$$x_i(t) \geq 0\,,\ F(t) \geq 0 \text{ et } 0 \leq O(t) \leq O_b\,.$$

La première contrainte est liée à la nature de $x_i(t)$, la deuxième assure que l'entreprise ne s'endette pas, la troisième traduit l'impossibité matérielle de stocker indéfiniment des produits non vendus.

2.2.2 Les variables de contrôle

Le mécanisme de décision de la firme est décrit à travers la prise en compte d'un certain nombre de variables de contrôle appelées aussi commandes. Parmi ces commandes, certaines sont à la disposition de l'entreprise, précisément celles qui seront réglées par le bloc baptisé *Décisions de l'entreprise* en section 2.1, alors que d'autres proviennent de systèmes extèrieurs (du bloc *Marché*) et sont des entrées imposées au module *Entreprise* (voir figures 2.2 et 2.3). Du point de vue de l'automatique, les commandes de la première catégorie opèrent par “feedback” ou rétro-action ; les autres sont assimilables à des commandes en “boucle ouverte” imposées par un système considéré ici comme extérieur (bien que l'entreprise agisse en retour sur ce marché, nous n'avons pas modélisé ce couplage plus complexe), donc à des paramètres du système. Cette distinction et les hypothèses sous–jacentes seront précisées petit à petit dans cette section. Les commandes du système Entreprise sont les suivantes. Dans ce travail, seule la première, la demande $d(t)$, sera considérée comme étant imposée de l'extèrieur par le bloc *Marché*. Toutes les suivantes seront des sorties du bloc *Contrôleur*.

- La demande à la firme pour la période $t+1$, $d(t) \geq 0$.
- Le vecteur de $\mathbb{R}^{n+N+1}$ des déclassements défini par :

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_0(t) \\ -u_1(t) \\ \vdots \\ -u_{n+N}(t) \end{bmatrix},$$

  où :

  - $u_0(t) = x_0(t+1)$ (imposé arbitrairement) joue un rôle très particulier puisqu'il ne correspond pas à un déclassement de processus mais représente au contraire le nombre de processus initialisés à la période $t+1$, ou un investissement de la firme en nombre de processus,

- $u_i(t)$, $1 \leq i \leq n+N$, désigne le nombre de processus âgés de i périodes que l'on va arrêter à la période $t+1$ (les déclassements à proprement parler).

- Le vecteur des salaires $w^t(t) = (w_1(t), \cdots, w_h(t))$, où h correspond au nombre de catégories salariales de l'entreprise. Ainsi $w_i(t)$ est le salaire qui sera versé pendant la période $t+1$ à la catégorie salariale i, $1 \leq i \leq h$.

- Le financement externe à l'entreprise $f(t)$. Il est décidé en fin de période t pour financer la période $t+1$.

- Le prix de vente $p(t)$ du produit pour la période $t+1$. Il est décidé en fin de période t.

- Le pourcentage de stock que l'on souhaite écouler pendant la période t+1 : $\alpha(t)$, avec $0 \leq \alpha(t) \leq 1$. On imposera $\alpha(t) \equiv 1$.

- Les nombres $d_0(t), \ldots, d_{n+N+1}(t)$ compris entre 0 et 1 qui reflétent la possibilité de ne pas déclasser mais de mettre en "veilleuse" certains des processus $x_i(t)$. Le cas où il n'y a pas de déclassements correspond à $d_0(t) = \cdots = d_{n+N+1}(t) = 1$. Le nombre $d_k(t)$ représente l' "output" du procédé k en tant que fraction de l'output qu'il produirait s'il fonctionnait normalement. Le coût en salaires du procédé k en tant que fraction des salaires qu'il coûterait s'il fonctionnait normalement est donné par $\rho(d_k(t))$ où ρ est une fonction croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ avec $\rho(1) = 1$ pour le fonctionnement sans mise en sommeil et $\rho(0) > 0$ qui traduit le fait qu'un procédé totalement mis en someil a tout de meme un coût en termes de salaires.

  On "encode" ces nombres dans deux matrices diagonales carrés de dimension $n+N+1$, $D_1(t)$ et $D_2(t)$, dont les coefficients diagonaux sont respectivement les $d_k(t)$ et les $\rho(d_k(t))$:

$$\begin{aligned} D_1(t) &= \operatorname{diag}(\, \rho(d_0(t))\,, \ldots, \rho(d_{n+N}(t))\,) \\ D_2(t) &= \operatorname{diag}(\, d_0(t)\,, \ldots, d_{n+N}(t)\,) \end{aligned}$$

  On simplifiera en général les études en supposant qu'aucun procédé n'est en "veilleuse", c'est-à-dire que tous les d_k sont égaux à 1, et que les matrices $D_1(t)$ et $D_2(t)$ sont égales à l'identité pour tout temps $t \geq 0$.

Nous nous contenterons d'imposer sur les variables de contrôle les contraintes minimales suivantes :

- $u_0(t) \geq 0$ et $0 \leq u_i(t) \leq x_i(t)$ pour $i = 1, \ldots, n+N$,
- $0 \leq w_i(t)$ pour $i = 1, \ldots, h$,
- $0 \leq p(t)$,
- $0 \leq f(t) \leq k\,F(t)$ pour limiter l'endettement (k est un taux d'endettement).

On remarquera que le choix des variables de contrôle et des contraintes retenues reflète des hypothèses implicites destinées à rendre appréhendable le modèle qui suit mais par ailleurs assez simplistes (en particulier, le choix des bornes inférieures sur $p(t)$ et les $w_i(t)$ et l'absence de borne supérieure sur $p(t)$ laissent dubitatifs ...). Cependant, on veillera lors des études et simulations du modèle à ce que ces différentes commandes ne prennent pas de valeurs trop irréalistes et ne subissent pas de variations trop rapides.

2.2.3 Les équations d'état du système

Ces équations d'état permettent de caractériser l'évolution dynamique du système en fonction des entrées du système *Entreprise*, c'est à dire en fonction des commandes décrites ci-dessus, fournies par le *Contrôleur* et le *Marché*. Notons que si V est une matrice ou un vecteur, V^t désignera dans ce qui suit son transposé : $V^t_{i,j} = V_{j,i}$. On introduit les quantités $\mathcal{A}, b, A$ suivantes.

- En notant $d_i(t)$ le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de $D_2(t)$,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ d_1(t) & 1-d_2(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & d_2(t) & 1-d_3(t) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & d_{n+N-1}(t) & 1-d_{n+N}(t) & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & d_{n+N}(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

- $b_i \geq 0$ est la quantité de produit fabriqué par processus d'âge i (donc $b_i = 0$ pour $0 \leq i \leq n$, processus en construction donc non productif). On a donc $b^t = (0, \ldots, 0, b_{n+1}, \ldots, b_{n+N})$.
- $a_{ij} \geq 0$ est la quantité de travail de la catégorie salariale j utilisée pour les processus âgés de i périodes. On a

$$A = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0h} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1h} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n+N1} & a_{n+N2} & \ldots & a_{n+Nh} \end{bmatrix}.$$

Les équations d'état composante à composante sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_0(t+1) & = & u_0(t) \\ x_k(t+1) & = & d_k(t)\, x_{k-1}(t) + (1 - d_{k+1}(t))\, x_k(t) + u_k(t)\,, \quad 1 \leq k \leq n+N-1 \\ x_{n+N}(t+1) & = & d_{n+N}(t)\, x_{n+N-1}(t) + u_{n+N}(t) \end{array} \right.$$

et :

$$\begin{aligned} F(t+1) &= F(t) + f(t) - \sum_{k=0}^{n+N} \rho(d_k(t))\, x_k(t+1) \sum_{i=1}^{h} a_{ki}\, w_i(t) \\ &\quad + p(t)\, \min(d(t), \alpha(t)\, O(t) + \sum_{k=n+1}^{n+N} b_k\, d_k(t)\, x_k(t+1))\,, \\ O(t+1) &= O(t) + \sum_{k=n+1}^{n+N} b_k\, d_k(t)\, x_k(t+1) \\ &\quad - \min(d(t), \alpha(t)\, O(t) + \sum_{k=n+1}^{n+N} b_k\, d_k(t)\, x_k(t+1))\,. \end{aligned}$$

Elles s'écrivent aussi sous forme matricielle :

$$X(t+1) = \mathcal{A}\, X(t) + U(t)\,, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} F(t+1) = {} & F(t) + f(t) - w^t(t)\, A^t\, D_1(t)\, (\mathcal{A}\, X(t) + U(t)) \\ & + p(t)\, \min(d(t), \alpha(t)\, O(t) + b^t\, D_2(t)\, (\mathcal{A}\, X(t) + U(t)))\,, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} O(t+1) &= O(t) + b^t\, D_2(t)\,(\mathcal{A}\, X(t) + U(t)) \\ &\quad - \min(d(t), \alpha(t)\, O(t) + b^t\, D_2(t)\,(\mathcal{A}\, X(t) + U(t)))\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'équation (2.1) traduit l'évolution du nombre de processus de chaque âge pendant une période : création, vieillissement, diminution ou même arrêt définitif. L'équation (2.2) traduit l'évolution du bilan financier de l'entreprise aprés l'écoulement d'une période. Elle a la signification suivante : l'entreprise dispose en fin de période $t+1$ de l'argent dont elle disposait en fin période t augmentée à la fois du financement externe auquel elle a eu recours et du montant de ses ventes (qui correspond au minimum entre sa production et la demande que le marché lui adresse) et diminuée du coût de sa production.
L'équation (2.3) traduit l'évolution des stocks de l'entreprise aprés l'écoulement d'une période. Elle a la signification suivante : la quantité de stock de l'entreprise en fin de période $t+1$ est égale à la quantité dont elle disposait en fin période t augmentée de sa production pendant la période t et diminuée de ses ventes pendant cette même période.
Dans les situations envisagées dans ce mémoire on a imposé :

- $\alpha(t) = 1$,
- $D_1(t)$ et $D_2(t)$ égales à la matrice identité.

Les équations (2.2) et (2.3) se reécrivent alors :

$$\begin{aligned} F(t+1) &= F(t) + f(t) - w^t(t)\, A^t\,(\mathcal{A}\, X(t) + U(t)) \\ &\quad + p(t)\, \min(d(t), O(t) + b^t\,(\mathcal{A}\, X(t) + U(t)))\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} O(t+1) &= O(t) + b^t\,(\mathcal{A}\, X(t) + U(t)) \\ &\quad - \min(d(t), O(t) + b^t\,(\mathcal{A}\, X(t) + U(t)))\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, les équations d'état composantes à composantes deviennent :

$$\begin{cases} x_0(t+1) & = u_0(t) \\ x_k(t+1) & = x_{k-1}(t) + u_k(t)\,, \quad 1 \le k \le n+N \end{cases}, \tag{2.6}$$

et :

$$\begin{aligned} F(t+1) &= F(t) + f(t) - \sum_{k=0}^{n+N} x_k(t+1) \sum_{i=1}^{h} a_{ki}\, w_i(t) \\ &\quad + p(t)\, \min(d(t), O(t) + \sum_{k=n+1}^{n+N} b_k\, x_k(t+1))\,, \\ O(t+1) &= O(t) + \sum_{k=n+1}^{n+N} b_k\, x_k(t+1) \\ &\quad - \min(d(t), O(t) + \sum_{k=n+1}^{n+N} b_k\, x_k(t+1))\,. \end{aligned}$$

2.3 Le système *Marché*

Ce système modélise la demande $d(t)$ à la firme (pour la période $t+1$). Cette demande influe sur le comportement de l'entreprise comme le montrent les équations d'état (2.4) et (2.5). En effet, l'entreprise ne vendra que le minimum entre ce qu'elle produit et ce que le *Marché* lui demande.
La demande à la firme $d(t)$ est calculée à partir des quantités (μ, p_e, ϕ) où :

- $\mu(t) \ge 0$ représente la taille du marché pour la période $t+1$,

- $p_e(t) \geq 0$ est le prix moyen du produit sur le marché pendant la période $t+1$,
- $\phi(t) \geq 0$ est la part de marché dite “absolue” de l'entreprise pendant la période $t+1$; en fait, cette quantité n'intervient dans ce qui suit que sous forme normalisée, c'est à dire $\phi/(1+\phi)$, qui représente une “part de marché relative”.

La demande est déterminée à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
d(t) &= \frac{\phi(t)}{1+\phi(t)}\,\mu(t)\,p_e(t)^\beta\,, \\
\mu(t) &= e^\gamma\,\mu(t-1)\,, \\
p_e(t) &= \frac{1}{1+\phi(t)}\,\phi(t)\,p(t) + \frac{p_e(t-1)^{1+\tau}}{p_e(t-2)^\tau}\,, \\
\phi(t) &= \phi(t-1)\,\frac{p_e(t-1)}{p(t-1)}\,.
\end{aligned}$$

où :

- $\beta \geq 0$ est la sensibilité de la demande au prix,
- $\gamma \geq 0$ le taux de croissance du marché,
- $\tau \geq 0$ un coefficient qui traduit l'importance des périodes précédentes dans le calcul du prix moyen.

Cette modélisation du fonctionnement du marché est ignorée par les décideurs de l'entreprise (le système *Contrôleur*).

2.4 Le système *Aide à la décision*

Ce système se réduit pour l'instant au calcul d'une anticipation de la demande à la firme pour la période à venir. Cette anticipation se fait en fonction des connaissances de la firme sur son propre passé et sur le passé du *Marché* (les valeurs de d aux pas de temps précédents). Les deux mécanismes d'anticipation suivants ont été retenus. On note $d^*(t)$ l'anticipation de la demande pour la période $t+1$. On distingue :

- une anticipation qui tient compte du prix du produit pour la période à venir :

$$d^*(t) \;=\; \frac{1}{p(t)}\,\frac{m(t-1)^2}{m(t-2)}\,, \text{ avec } m(t) = p(t)\;\; d(t)\,, \tag{2.7}$$

- une anticipation plus simple qui n'est rien d'autre qu'une interpolation linéaire entre les demandes des deux périodes précédentes :

$$d^*(t) \;=\; 2\,d(t-1) - d(t-2)\,. \tag{2.8}$$

2.5 Le système *Contrôleur*

Le *Contrôleur* désigne la méthode de décision employée par les dirigeants de l'entreprise pour ajuster les variables de contrôle de manière à satisfaire un objectif précis. Nous avons toutefois incorporé la modélisation de l'évolution des salaires et des prix à ce contrôleur bien qu'elle ne relève pas exclusivement de "décisions" de l'entreprise !

2.5.1 Marché de l'emploi et salaires

C'est le *Contrôleur* qui impose pour chaque période la valeur des salaires. Ces salaires sont logiquement fonction d'un marché de l'emploi. On a donc pour chaque catégorie salariale i la modélisation suivante :

$$\begin{aligned} w_i(t) &= w_i(t-1) + \nu\,\frac{A^t_{[i]}\,X(t-1) - \psi(t)\,w_i(t-1)^\theta}{\psi(t)\,w_i(t-1)^{\theta-1}}\,, \\ \psi(t) &= e^\chi\,\psi(t-1)\,, \end{aligned}$$

où :

- $A_{[i]}$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice A, si bien que $A^t_{[i]}\,X(t-1)$ représente la quantité de travail fournie à la période $t-1$ par la catégorie i pour l'ensemble des processus,

- $\psi(t) > 0$ désigne l'offre de travail,
- $\nu \geq 0$ et $\theta \geq 1$ sont des paramètres,
- χ désigne le taux de croissance de l'offre de travail.

Le salaire est donc ici fixé sur la base du salaire de la période précédente réajusté par la prise en considération d'un ratio qui mesure l'écart entre la demande et l'offre de travail.

2.5.2 Prix du produit

Le prix du produit imposé par le *Contrôleur* est calculé de la façon suivante :

$$p(t) \quad = \quad p(t-1)\left(K\,\frac{d(t-1)-d^*(t-1)}{d^*(t-1)}+1\right), \tag{2.9}$$

où $K \geq 0$ est un coefficient. Ici encore, le prix à la période t est fixé sur la base du prix et de la différence entre la demande réelle d et la demande anticipée d^* à la période $t-1$.

2.5.3 Décision des déclassements et du financement externe

Une fois $p(t)$ et $w(t)$ déterminés par les méthodes proposées en 2.5.1 et 2.5.2, il est possible de contrôler un certain nombre des variables, $U(t), D_2(t), f(t)$ et $\alpha(t)$ afin de réaliser un objectif de production. Cet objectif de production est de faire coincider l'offre avec la demande anticipée.
On décrit ci-aprés en deux étapes un algorithme qui permet le calcul du vecteur des déclassements $U(t)$ et du financement externe $f(t)$ (rappelons que les matrices $D_1(t)$ et $D_2(t)$ sont fixées égales à l'identité et que $\alpha(t) = 1$).

Déclassements des processus productifs

Afin de faire coincider l'offre avec la demande anticipée, le *Contrôleur* détermine tout d'abord sa capacité de production maximum d_{max} pour la période à venir. Cette capacité de production est calculé en supposant qu'il n'y ait aucun déclassement. On a donc :

$$d_{max} = O(t) + \sum_{i=n+1}^{n+N} b_i \; x_{i-1}(t).$$

En considérant que l'offre de l'entreprise est égale à sa capacité maximum de production, la contrainte de production s'écrit :

$$d_{max} = d^*(t).$$

C'est dans le but de satisfaire cette contrainte que le *Contrôleur* va régler les déclassements relatifs aux processus productifs. Les deux cas suivants peuvent alors se présenter :

- <u>1er cas</u> : $d^*(t) \geq d_{max}$.
  La capacité maximum de production est inférieure à la demande anticipée : il ne faut pas dans ce cas déclasser de processus productif et l'on impose alors $u_i(t) = 0$ pour $n+1 \leq i \leq n+N$.

- <u>2eme cas</u> : $d^*(t) < d_{max}$.
  La capacité maximum de production est strictement supérieure à la demande anticipée : on déclasse alors les processus productifs en commencant par les plus âgés ; soit l'on parvient ce faisant à rendre égales la capacité productive et la demande anticipée, soit l'on déclasse tous les processus productifs afin de minimiser $d_{max} - d^*(t)$. Plus précisément, l'algorithme est le suivant.
  <u>Si</u> $b_{n+N}\, x_{n+N-1}(t) \geq d_{max} - d^*(t)$,
  <u>alors</u> $u_{n+N}(t) = \dfrac{d_{max} - d^*(t)}{b_{n+N}}$ et $u_i(t) = 0$ pour $n+1 \leq i \leq n+N-1$;
  <u>sinon</u> $u_{n+N}(t) = x_{n+N-1}(t)$; on considère alors les processus qui ont un an de moins.

  <u>Si</u> $b_{n+N-1}\, x_{n+N-2}(t) \geq d_{max} - d^*(t) - b_{n+N}\, x_{n+N-1}(t)$,
  <u>alors</u>
  $u_{n+N-1}(t) = \dfrac{d_{max} - d^*(t) - b_{n+N}\, x_{n+N-1}(t)}{b_{n+N-1}}$ et $u_i(t) = 0$ pour $n+1 \leq i \leq n+N-2$;

sinon $u_{n+N-1}(t) = x_{n+N-2}(t)$; on considère alors les processus qui ont encore un an de moins et l'on réitère l'algorithme.

On obtient ainsi $u_i(t)$ pour $n+1 \leq i \leq n+N$

Déclassements des processsus non productifs et financement externe

C'est la contrainte financière qui impose ces déclassements. Cette contrainte signifie que le coût des processus (productifs et non productifs) pour la période $t+1$ qui commence doit être inférieur à l'argent dont l'entreprise peut disposer en fin de période t.
Notons $I(t+1)$ la quantité maximum d'argent dont peut disposer l'entreprise en fin de période t.

$$I(t+1) = (1+k)\, F(t).$$

Rappelons que (voir section 2.2.1 et 2.2.2) :

- $k\, F(t)$ représente le seuil maximum d'argent que la firme peut emprunter en fin de période t,
- $F(t)$ est le montant dont dispose la firme en fin de période t.

La contrainte de financement peut donc s'écrire (voir aussi l'équation (2.4) :

$$I(t+1) \geq w^t(t)\, A^t\, X(t+1). \tag{2.10}$$

On impose dans un premier temps :

$$u_0(t) = \frac{d^*(t)}{\sum_{i=n+1}^{n+N} b_i},$$

qui correspond à la demande anticipée moyennée par la quantité totale de produit fabriquée, c'est à dire à la part moyenne de d^* satisfaite par processus productif,

$$\text{et } u_i(t) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

On connait ainsi $u_i(t)$ pour $0 \leq i \leq n+N$ ce qui permet de calculer $X(t+1)$ (voir équation (2.1)). On applique alors l'algorithme suivant :

<u>Si</u> $I(t+1) \geq w^t(t)\, A^t\, D_1(t)\, X(t+1)$,
<u>alors</u> on ne fait aucun déclassement supplémentaire ;
<u>sinon</u> on déclasse (en commencant par les processus les plus jeunes) jusqu'à ce que la contrainte (2.10) soit satisfaite, ce que l'on supposera toujours possible !

On détermine par la suite le financement externe nécessaire :

- $f(t) = 0$ si $F(t) \geq w^t(t)\, A^t\, X(t+1)$,
- $f(t) = (w^t(t)\, A^t\, X(t+1)) - F(t)$ sinon ; on vérifie dans ce cas que la contrainte $f(t) \leq k\, F(t)$ visant à limiter l'endettement (section 2.2.2) est satisfaite grâce à (2.10).

Notons que cet algorithme n'aboutit pas à une formule explicite simple pour déterminer $U(t)$ et $f(t)$. Une telle formule ferait apparaitre de nombreux "min, max" et serait en réalité moins éloquente que l'algorithme présenté ci–dessus .

Chapitre 3

Etude des équilibres du modèle

On s'intéresse ici au couplage des trois systèmes *Entreprise*, *Contrôleur*, *Aide à la décision*, voir figure 2.3 (page 16). On considére dans ce chapitre la demande d comme un paramètre constant et l'on néglige le système *Marché*. On caractérise les points d'équilibre du système autonome ainsi obtenu et l'on étudie leur stabilité.
Le système *Entreprise* est modélisé par (2.1), (2.4), (2.5) où l'on a supprimé la possibilité de mettre en veilleuse certains procédés sans les déclasser ($D_1(t)$ et $D_2(t)$ sont égales à la matrice identité) ainsi que celle de n'écouler qu'une partie du stock ($\alpha(t) = 1$).

3.1 Equilibres du système dynamique

L'interconnexion des trois systèmes *Entreprise*, *Contrôleur*, *Aide à la décision* décrits au chapitre 2 s'écrit – en considérant la demande comme un paramètre constant extérieur – comme un système dynamique discret (Σ), sans commande, de la forme :

$$Z(t+1) = Q(Z(t)), \tag{Σ}$$

où :

$$Z = \begin{bmatrix} X \\ F \\ O \\ w_i \\ \psi \\ p \end{bmatrix},$$

et Q (qui dépend aussi des paramètres d, ν, θ, χ et $A, \mathcal{A}, b, f, d^*$) est défini par :

$$Q(Z) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}X + U \\ \\ F + f - w^t A^t (\mathcal{A}X + U) \\ +p \min(d, O + b^t (\mathcal{A}X + U)) \\ \\ O + b^t (\mathcal{A}X + U) \\ -\min(d, O + b^t (\mathcal{A}X + U)) \\ \\ w_i + \nu \dfrac{A^t_{[i]} X - \psi w_i^\theta}{\psi w_i^{\theta - 1}} \\ \\ e^\chi \psi \\ \\ p \left(K \dfrac{d - d^*}{d^*} + 1 \right) \end{bmatrix}.$$

Rappelons que les quantités U et f sont obtenues en fonction de d, X, w, comme expliqué en section 2.5.3. Dans la formule ci-dessus, U et f sont donc à interpréter comme ces fonctions de d, X, w que nous avons choisi de ne pas expliciter. Les positions d'équilibre sont les valeurs de Z telles que $Z = Q(Z)$.

3.1.1 Caractérisation des points d'équilibre

On notera I le vecteur colonne de $\mathbb{R}^{n+N+1}$ donné par $I = (1, \ldots, 1)^t$. On définit également les quantités suivantes, qui ne dépendent que des paramètres de (Σ) :

$$\delta = \frac{d}{\sum_{i=n+1}^{n+N} b_i},$$

et

$$S = \left[\sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} \right]^{\frac{\theta}{\theta+1}} .$$

Notons que S correspond à la norme $l_{(\theta+1)/\theta}$ du vecteur $A^t\, I$ (dont le k^{me} élément est la somme des éléments de la k^{me} colonne de A, donné aussi par $A^t_{[k]}\, I$).

Théorème 1 *Il n'y a d'équilibre du système (Σ) que pour une croissance du marché du travail nulle ($\chi = 0$). Dans ce cas, et pour chaque valeur non nulle de la demande d, considérée comme un paramètre, l'ensemble des positions d'équilibre est une partie de $\mathbb{R}^{n+N+h+3}$, paramètrée par $(\tilde{x}, F) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, où $\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow F = 0$ – avec $S\,\tilde{x} = F^{\frac{\theta}{\theta+1}}\, \psi^{\frac{1}{\theta+1}}$ – et décrite par :*

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 = \cdots = x_{n+N} = x_e\,, \\ O &= 0\,, \\ \psi &= \frac{(S\,\tilde{x})^{\theta+1}}{F^\theta}, \\ w_i &= \frac{F\ \left(x_e \sum_l a_{l,i}\right)^{\frac{1}{\theta}}}{(S\tilde{x})^{\frac{\theta+1}{\theta}}}, \quad i = 1, \cdots, h\,, \\ p &= \frac{1}{x_e \sum_{i=n+1}^{n+N} b_i} \left[\left(\frac{x_e}{\tilde{x}} \right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} F - f \right], \end{aligned}$$

où x_e et f sont donnés par :

1. *si $\tilde{x} \geq \delta$, alors*
$$x_e = \delta \quad ; \quad f = 0\,,$$

2. *si $\tilde{x} < \delta < (1+k)^{\frac{\theta}{\theta+1}} \tilde{x}$, alors*
$$x_e = \delta \quad ; \quad f = \left(\left(\frac{\delta}{\tilde{x}} \right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} - 1 \right) F\,,$$

3. *si* $(1+k)^{\frac{\theta}{\theta+1}}\tilde{x} \leq \delta$, *alors*

$$x_e \;=\; \tilde{x}\,(1+k)^{\frac{\theta}{\theta+1}} \quad ; \qquad f \;=\; k\,F \;,$$

Les différentes étapes qui permettent d'établir ce théorème sont détaillées ci-aprés. Tout d'abord, la définition de $\tilde{x}$, choisie pour paramétrer la variété des équilibres, implique

$$\boxed{\psi = \frac{(S\,\tilde{x})^{\theta+1}}{F^{\theta}}}$$

• Equilibre du prix du produit p

On déduit de (2.9) que :

$$\boxed{d^* = d}$$

relation compatible avec les deux procédures d'anticipations de la demande envisagées, (2.7) et (2.8).

• Equilibre du vecteur des processus X

A l'équilibre, l'équation d'état (2.6) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & u_0\,, \\ & \vdots & \\ x_1 & = & x_0 - u_1\,, \\ & \vdots & \\ x_i & = & x_{i-1} - u_i\,, \\ & \vdots & \\ x_{n+N} & = & x_{n+N-1} - u_{n+N}\,. \end{array}\right.$$

Les u_i étant positifs, ceci implique en particulier :

$$0 \leq x_{n+N} \leq x_{n+N-1} \leq \cdots x_1 \leq x_0 = u_0 \,. \tag{3.1}$$

On observe que si $u_i \neq 0$ pour un certain i, $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire si l'un des processus nonproductifs est déclasseé, alors nécessairement, en vertu de la règle de déclassement choisie pour les processus non productifs (section 2.5.3), $u_0 = 0$ et d'après (3.1), $x_0 = x_1 = \cdots = x_{n+N} = u_0 = 0$. Si $u_i = 0$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$, alors $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = u_0$ avec $u_0 \leq \delta$ d'après les règles de déclassement ($u_0 = \delta$ si les contraintes de financement le permettent). Dans ce cas, d'après (3.1), $x_i \leq \delta$, pour $1 \leq i \leq n+N$ et :

$$b^t X \;=\; \sum b_i x_i \;\leq\; (\sum b_i)\, \delta \;=\; d \;=\; d^* \,. \tag{3.2}$$

Mais, à l'équilibre, (2.5) s'écrit :

$$b^t X = \min(d, O + b^t X)$$

Ainsi, soit $O = 0$, soit $d = b^t X$. Dans le premier cas, $d_{max} = d$, et comme la régle de déclassement des processus productifs n'autorise des déclassements de ces processus que lorsque la capacité productive de la firme est supérieure à la demande, les u_i pour $i > n$ sont nuls ; tous les x_i sont donc égaux. Dans le second cas, on a $\sum b_i x_i = (\sum b_i)\delta$ ce qui, chaque x_i étant inférieur ou égal à δ d'après (3.1), implique que tous les x_i valent δ.

$$\boxed{x_0 = x_1 = \ldots = x_{n+N} = u_0 \leq \delta}$$

• Equilibre du stock O

On a vu ci-dessus que si $O \neq 0$ alors, $d = b^t X$ et donc $d_{max} > d$. Mais dans ce cas certains processus productifs doivent être déclassés ce qui est impossible à équilibre en vertu de ce qui précède (les x_i ne seraient pas tous égaux si un déclassement était non nul). Ainsi :

$$\boxed{O = 0}$$

• Equilibre du marché du travail w
L'équilibre de l'avant-dernière composante de Z entraîne $\psi = e^{\chi}\psi$ et donc

$$\boxed{\chi = 0}$$

L'équilibre de w_i lui-même entraîne, pour $1 \leq i \leq h$, $\psi w_i^\theta = A_{[i]}^t X$ et donc, vu que $X = (u_0, \ldots, u_0)^t$,

$$\boxed{w_i = \left(\frac{u_0\, A_{[i]}^t I}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta}} = \frac{F\,\left(u_0 \sum_l a_{l,i}\right)^{\frac{1}{\theta}}}{(S\tilde{x})^{\frac{\theta+1}{\theta}}}}$$

• Equilibre du bilan financier F
A l'équilibre, (2.4) implique, vu que $\min(d, O + b^t X) = b^t X$:

$$f = w^t\, A^t X - p\, b^t X.$$

Mais, d'après ce qui précède,

$$w^t A^t X \;=\; \sum_{i,j} a_{j,i} \left(\frac{F\,\left(u_0 \sum_l a_{l,i}\right)^{\frac{1}{\theta}}}{(S\tilde{x})^{\frac{\theta+1}{\theta}}} \right) u_0 \;=\; \left(\frac{u_0}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} F \;,$$

où la dernière égalité vient tout simplement de la définition de S. L'équation précédente s'écrit donc :

$$f \;=\; \left(\frac{u_0}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} F \;-\; p\left(\sum b_i\right) u_0 \;. \tag{3.3}$$

Par ailleurs, le financement externe (sous la contrainte $f \leq k\,F$) est $f = \max(0, w^t\, A^t\, X - F)$, soit :

$$f \;=\; \max\left(0\;,\; \left(\left(\frac{u_0}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} - 1\right) F\right) \tag{3.4}$$

On peut alors distinguer trois cas :

1. Si $\delta \leq \tilde{x}$, alors a fortiori, puisque $u_0 \leq \delta$, on a $u_0 \leq \tilde{x}$, ce qui implique $f = 0$ d'après (3.4). Dans ce cas, $u_0 = \delta$ (car u_0 n'est strictement inférieur à δ que lorsque le financement externe atteint le maximum autorisé $f = kF$). Le prix p est alors donné par (3.3) avec $f = 0$ et $u_0 = \delta$, c'est-à-dire :
$$p \;=\; \frac{F\,\delta^{\frac{1}{\theta}}}{\tilde{x}^{\frac{\theta+1}{\theta}}\sum b_i}\;. \tag{3.5}$$

2. Si $\tilde{x} < \delta < (1+k)^{\frac{\theta}{\theta+1}}\tilde{x}$, alors $\tilde{x} < u_0$ (car le contraire entraînerait $f = 0$ d'après (3.4) et, comme vu plus haut, $f = 0$ entraîne $u_0 = \delta$, une contradiction). On a donc, d'après (3.4),
$$f \;=\; \left(\left(\frac{u_0}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} - 1\right) F$$
mais comme $u_0 \leq \delta$, on a
$$\left(\frac{u_0}{\tilde{x}}\right)^{\frac{\theta+1}{\theta}} \;<\; 1+k\;,$$
et donc $f < kF$ ce qui entraîne, comme dans le cas précédent que la contrainte d financement n'est pas saturée et donc que $u_0 = \delta$. Le prix p est alors donné par (3.3), c'est-à-dire
$$p \;=\; \frac{F}{\delta\sum b_i}\;.$$

3. Si $(1+k)^{\frac{\theta}{\theta+1}}\tilde{x} \leq \delta$, alors on a $f = kF$ car si $f < kF$, $u_0 = \delta$, et (3.4) implique alors $f \geq kF$. L'équation (3.4) permet alors d'obtenir u_0 :
$$u_0 \;=\; \tilde{x}\,(1+k)^{\frac{\theta}{\theta+1}}$$
et p est obtenu a partir de (3.3) :
$$p \;=\; \frac{F}{\tilde{x}\,(1+k)^{\frac{\theta}{\theta+1}}\sum b_i}\;.$$

3.2 Stabilité des positions d'équilibre

Rappelons tout d'abord la définition de la notion de "stabilité locale" utilisée ici.

Définition 1 *Une position d'équilibre Z_{eq} du système (Σ) est localement stable si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \text{tel que } |Z(0) - Z_{eq}| < \eta \ \Rightarrow (|Z(t) - Z_{eq}| < \varepsilon\,,\ \forall t > 0)\ ,$$

où $Z(t)$ est solution du système (Σ). En d'autres termes, la position d'équilibre Z_{eq} du système (Σ) est localement stable si l'on peut garantir que $Z(t)$ reste arbitrairement proche de Z_{eq}, pour tout $t \geq 0$, dès que la condition initiale en est elle–même suffisamment près.

Notons qu'il existe (entre autres) une notion de stabilité plus forte, dite "locale asymptotique", qui garantit de plus que $Z(t)$ tend vers Z_{eq}. Cette propriété est ici exclue dans la mesure où tout voisinage d'un point d'équilibre en contient une infinité d'autres (une surface de dimension 2, en général, paramétrée par $(\tilde{x}, \psi)$, voir théorème 1).
Nous aurons besoin du résultat suivant, qui relie la stabilité d'un système dynamique à celle de son "linéarisé" au voisinage d'un point d'équilibre, que l'on peut trouver dans tout bon manuel sur les systèmes dynamiques à temps discret, sous cette forme, ce résultat peut être trouvé dans l'ouvrage d'automatique récent (d'ANDREA–NOVEL B., COHEN DE LARA M., 1993, prop.5.2.13).

Proposition 1 *Soit le système dynamique discret $(\mathcal{P})$: $Y(t+1) = P(Y(t))$, P étant une application continuement différentiable d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$, et Y_{eq} un point d'équilibre : $Y_{eq} = P(Y_{eq})$. Soit ρ le plus grand module des valeurs propres de $P'(Y_{eq})$, matrice jacobienne de P en Y_{eq}. Si $\rho < 1$, alors $(\mathcal{P})$ est localement (asymptotiquement) stable. Si $\rho > 1$, alors $(\mathcal{P})$ est localement instable.*

Ce résultat classique ne nous permettra cependant pas de conclure directement à la stabilité du système (Σ) lui–même mais seulement à celle de certaine des composantes de son vecteur d'état Z.

3.2.1 Positions d'équilibre à financement externe nul

Théorème 2 *Les positions d'équilibre* $Z_{eq} = (X_{eq}, F_{eq}, O_{eq}, w_{eq}, \psi_{eq}, p_{eq})^t$ *du système dynamique* (Σ) *correspondant à un financement externe nul (décrites au point 1 du théorème 1) et vérifiant* $w_{eq}^t\, A\, X_{eq} < F_{eq}$ *sont localement instables lorsque* $|1-\nu\,\theta| \neq 1$. *Cependant, sous la condition* $|1-\nu\,\theta| < 1$, *ces points d'équilibre sont localement stables pour le système* (Σ) *réduit à la variété invariante* $\{\psi(t) = \psi_{eq}\,,\ p(t) = p_{eq}\}$ *; plus précisément, sur cette variété, toute trajectoire issue d'un point initial assez proche de* Z_{eq} *tend vers un point d'équilibre proche de* Z_{eq} *(et qui n'en diffère, peut-être, que par la valeur de* F*).*

Preuve

On suppose ici qu'il n'y a qu'une seule catégorie salariale ($h = 1$, de sorte qu'en particulier $w^t = w$). Dans le cas général, la preuve est exactement la même via un traitement de w par composantes (rendu possible car les w_i évoluent de façon découplée, voir section 2.5.1).

Tout d'abord, notons que les variables p et ψ restent égales à leur valeur initiale (en effet à demande constante donnée, $d^* = d$, ce qui entraine que p reste inchangé ; de plus, comme nécessairement $\chi = 0$, ψ reste constante). Choisissons alors un voisinage V de la position d'équilibre Z_{eq} dans $\mathbb{R}^{n+N+4}$ assez petit pour que, en notant $U_\delta = (\delta, 0, \cdots, 0)$, les inégalités suivantes soient vérifiées pour tout $Z = (X, F, O, w, \psi, p)^t$ dans V :

1. $w\, A\, (\mathcal{A}\, X + U_\delta) < F$,
2. $O + b^t\, (\mathcal{A}\, X + U_\delta) < 2\, d$.

Notons que, puisque $w_{eq}\, A\, (\mathcal{A}\, X_{eq} + U_\delta) = w_{eq}\, A\, X_{eq} < F_{eq}$ (par hypothèse) et $O_{eq} + b^t\, (\mathcal{A}\, X_{eq} + U_\delta) = b^t\, X_{eq} = d$ (théorème 1, point 1), il est toujours possible de trouver un tel voisinage V de Z_{eq}. En conséquence des inégalités 1 et 2 et en vertu des procédures de déclassement des processus (section 2.5.3), pour tout $Z(0)$ dans V, on a $U(t) \equiv U_\delta$, $t \geq 0$. Ainsi, pour tout $Z(0)$ dans V, le vecteur des processus vaut X_{eq} au bout de $n + N$ itérations, c'est à dire $x_k(t) = x_e = \delta = \dfrac{d}{\sum_{i=n+1}^{n+N} b_i}$, pour $0 \leq k \leq n + N$ et $t \geq n + N$; de plus, l'inégalité 1 ci-dessus entraîne que le financement externe f est identiquement nul. Par ailleurs, l'hypothèse 2 garantit d'après (2.5) que pour tout $Z(0)$ dans V, le stock O est nul après deux itérations ($O(t) \equiv 0\,,\ \forall t \geq 1$). La stabilité du système (Σ) repose donc sur le comportement de F et w ; ce dernier, d'après (2.4) et 2.5.1, est régi par les équations suivantes, pour $Z(0) \in V$ et $t \geq n+N$:

$$\begin{aligned} F(t+1) &= F(t) - w(t)\, A^t\, X_{eq} + p\, b^t\, X_{eq}\,, \\ w(t+1) &= w(t) + \nu\, \frac{A^t\, X_{eq} - \psi\, w(t)^\theta}{\psi\, w(t)^{\theta-1}}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

L'équation de w est autonome et s'écrit aussi :

$$w(t+1) = \Omega_{\psi, X_{eq}, \nu, \theta}(w(t)) \tag{3.7}$$

où $\Omega_{\psi, X_{eq}, \nu, \theta}$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Omega_{\psi, X_{eq}, \nu, \theta}(w) = w + \nu\, \frac{A^t\, X_{eq} - \psi\, w^\theta}{\psi\, w^{\theta-1}}\,.$$

Elle admet un unique point d'équilibre w_l déterminé par $A^t\, X_{eq} = \psi\, w_l^\theta$ (notons au passage que $w_l = w_{eq}$ lorsque $\psi = \psi_{eq}$) et l'on vérifie aisément que :

$$\frac{\mathrm{d}\, \Omega_{\psi, X_{eq}, \nu, \theta}}{\mathrm{d}\, w}(w_l) = 1 - \nu\, \theta\,.$$

On applique alors la proposition 1 au système (3.7). La matrice jacobienne évoquée dans cette proposition est ici une matrice 1×1 et son unique valeur propre est $1 - \nu\, \theta$. Si $|1 - \nu\, \theta| > 1$, alors la position w_{eq} est localement instable pour le système réduit (3.7) et donc Z_{eq} est elle aussi localement instable pour le système (Σ). Si $|1 - \nu\, \theta| < 1$, alors la position w_{eq} est localement stable pour le système réduit (3.7). Pour poursuivre notre analyse dans ce cas, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 1 *Pour tout $\alpha > |1 - \nu\, \theta|$, il existe $R > 0$ tel que si $|w(t) - w_l| < R$ alors*

$$|w(t+y) - w_l| \leq \alpha^y\, |w(t) - w_l|\,.$$

La preuve de ce lemme repose sur y itérations du théorème des accroissements finis appliquées sur un voisinage de w_l où la dérivée $\mathrm{d}\,\Omega_{\psi,X_{eq},\nu,\theta}/\mathrm{d}\,w$ est de module inférieur à α.

Par ailleurs, l'équation (3.6) itérée y fois, pour tout entier y tel que $F(t+y) \geq 0$, s'écrit :

$$F(t+y) = F(t) - \left[\sum_{k=0}^{y-1} w(t+k)\, A^t - y\, p\, b^t\right] X_{eq}\,.$$

On choisit alors α tel que $|1-\nu\,\theta| < \alpha < 1$; grâce au lemme ci–dessus, il existe $R > 0$ tel que si $|w(t) - w_l| < R$ alors :

$$\left|F(t+y) - \Big(F(t) - \left[w_l\, A^t - p\, b^t\right]\, y\, X_{eq}\Big)\right| \leq |A^t\, X_{eq}|\, |w(t) - w_l| \sum_{k=0}^{y-1} \alpha^k\,.$$

On distingue alors les trois cas suivants :

- $w_l\, A^t - p\, b^t > 0$. Dans ce cas, F décroit avec y jusqu'à atteindre 0 ; la trajectoire de (Σ) quitte donc V.
- $w_l\, A^t - p\, b^t < 0$, l'entreprise s'enrichit à chaque itération et F diverge vers l'infini ; la trajectoire de (Σ) quitte donc V dans ce cas aussi.
- $w_l\, A^t - p\, b^t = 0$. Dans ce cas,

  $$F(t+y) \;=\; F(t) \;+\; |A^t\, X_{eq}|\, |w(t) - w_l| \sum_{k=0}^{y-1} \epsilon(k)\,,$$

  avec $\epsilon(k) \leq \alpha^k$ et donc $F(t+y)$ tend vers une valeur dont la distance à $F(t)$ est au plus $\frac{1}{1-\alpha}\, |A^t X_{eq}|\, |w(t) - w_l|$.

Les deux premiers points prouvent la propriété d'instabilité du théorème ; en effet, l'inégalité correspondant à l'un ou l'autre de ces deux cas est vérifiée par des points de V aussi proche que l'on veut de Z_{eq}.
Le dernier point prouve la propriété de stabilité pour le système (Σ) réduit à la variété (évidemment) invariante $\{\psi(t) = \psi_{eq}\,,\ p(t) = p_{eq}\}$ car $w_l\, A^t - p\, b^t = 0$ lorsque $p = p_{eq}$ et $w_l = w_{eq}$ c'est à dire $\psi = \psi_{eq}$.

3.2.2 Positions d'équilibre à financement externe non nul et non saturé

Théorème 3 *Les positions d'équilibre* $Z_{eq} = (X_{eq}, F_{eq}, O_{eq}, w_{eq}, \psi_{eq}, p_{eq})^t$ *du système dynamique* (Σ) *correspondant à un financement externe non nul et non saturé (décrites au point 2 du théorème 1,* $0 < f < k\, F_{eq}$*) sont localement instables si* $|1 - \nu\,\theta| > 1$ *et localement stables si* $|1 - \nu\,\theta| < 1$*. Plus précisément, dans ce dernier cas, toute trajectoire issue d'un point initial assez proche de* Z_{eq} *tend vers un point d'équilibre proche de* Z_{eq}*.*

Preuve

Ici encore, la preuve est donnée dans le cas d'une seule catégorie salariale $(h = 1)$ mais se généralise facilement.

Comme dans le cas précédent, les variables p et ψ restent égales à leur valeur initiale.

On choisit maintenant un voisinage V de la position d'équilibre Z_{eq} dans $\mathbb{R}^{n+N+4}$ assez petit pour que, en notant $U_\delta = (\delta, 0, \cdots, 0)$, les inégalités suivantes soient vérifiées pour tout $Z = (X, F, O, w, \psi, p)^t$ dans V :

1. $0 < w\, A^t\, (\mathcal{A}\, X + U_\delta) - F < k\, F$
2. $O + b^t\, (\mathcal{A}\, X + U_\delta) < 2\, d.$

Notons que dans ce cas, puisque $0 < w_{eq}\, A\, (\mathcal{A}\, X_{eq} + U_\delta) - F_{eq} = w_{eq}\, A\, X_{eq} - F_{eq} < k\, F_{eq}$ (par hypothèse) et $O_{eq} + b^t\, (\mathcal{A}\, X_{eq} + U_\delta) = b^t\, X_{eq} = d$ (théorème 1, point 2), il est toujours possible de trouver un tel voisinage V de Z_{eq}.
Comme dans le cas précédent (section 3.2.1), pour tout $Z(0)$ dans V, on a $U(t) \equiv U_\delta$, $t \geq 0$, et pour tout $Z(0)$ dans V, le vecteur des processus vaut X_{eq} au bout de $n + N$ itérations, c'est à dire $x_k(t) = x_e = \delta = \dfrac{d}{\sum_{i=n+1}^{n+N} b_i}$, pour $0 \leq k \leq n + N$ et $t \geq n + N$; de plus, le stock O est nul aprés deux itérations $(O(t) \equiv 0\,,\ \forall t \geq 1)$. Enfin, l'inégalité 1 ci-dessus entraîne que le financement externe reste donné par $f(t) = w\, A^t\, X(t+1) - F(t)$ et vérifie la contrainte $0 < f(t) < k\, F(t)$. Ainsi, d'après (2.4), $F(t+1) = p\, b^t\, X_{eq}$ est constante (au

bout de $n+N+1$ itérations.

La stabilité du système dépend donc uniquement du comportement de $w(t)$. En vertu des résultats de la section 2.5.1, l'évolution de w est encore régie, pour $Z(0) \in V$ et $t \geq n+N$ par la même équation (3.7) que dans la preuve du théorème 2. Comme dans ce cas, si $|1-\nu\,\theta|>1$, Z_{eq} est localemement instable ; si $|1-\nu\,\theta|<1$, Z_{eq} est localemement stable.

3.2.3 Simulations numériques

Les trois familles d'équilibre du modèle décrites dans le théorème 1 :

- équilibre sans financement externe ($f=0$),
- équilibre avec financement externe non saturé ($0<f<k\,F$),
- équilibre avec financement externe saturé ($f=k\,F$),

sont illustrées par des simulations numériques qui permettent de les visualiser. Si les coûts de production - dans lesquels sont inclus les coûts des processus en phase de construction - sont couverts par les recettes, et ce durant chacune des périodes, l'entreprise ne recourt jamais au financement externe ($f=0$) et seule la vente du produit au prix p lui permet de payer les salaires w (simulation 1).

Si tel n'est pas le cas, l'entreprise recourt au financement externe dans une limite fixée par sa capacité de financement ($0<f<k\,F$) ce qui lui permet à la fois de servir la demande $d=d^*$ qui lui est adressée et de payer les salaires w (simulation 2).
Lorsque le financement externe est saturé ($f=k\,F$), l'offre est contrainte et l'équilibre est atteint pour un volume offert d_{max} inférieur à celui anticipé d^*. On constate alors une légère dégradation du bilan financier de l'entreprise par rapport aux deux situations précédemment décrites. Cette dégradation n'est pas le résultat d'un mauvais calcul économique - la demande anticipée d^* s'ajuste parfaitement à la demande d effectivement exprimée - mais est l'indice de l'incapacité dans laquelle se trouve l'entreprise de servir une demande deux fois plus forte que celle qui correspond à sa capacité de production d'équilibre

(simulation 3).

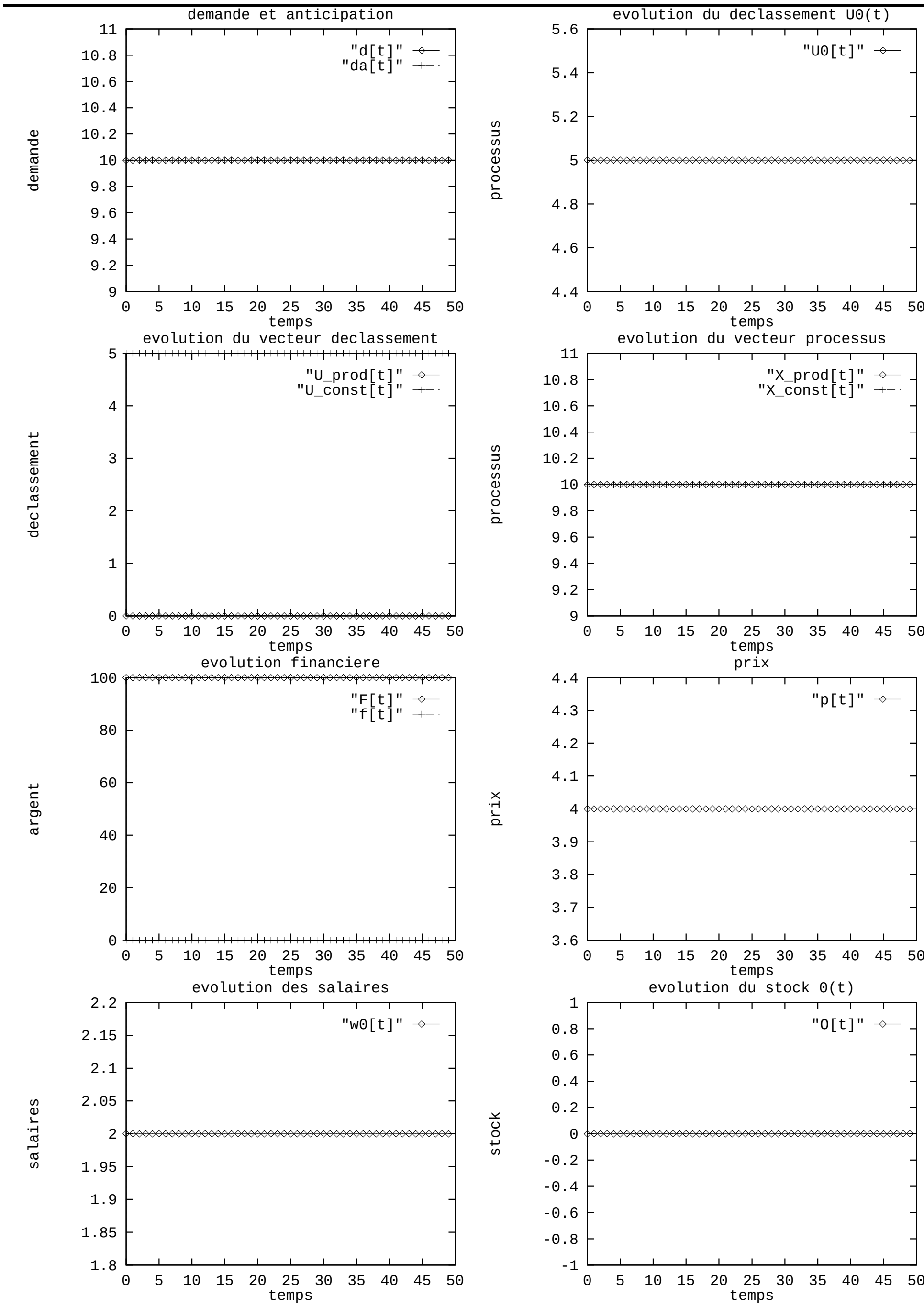
Les résultats d'instabilité (et stabilité) du théorème 2 donnent lieu à des simulations pour trois types de conditions initiales décrites dans la preuve (rappelons que : $A^t X_{eq} = \psi\, w_l^\theta$).

- $w_l\, A^t - p\, b^t > 0$, l'entreprise vend son produit à perte. La firme est alors obligée d'avoir recours au financement externe pour développer ses processus en construction. Elle retrouvera une situation d'équilibre d'une autre nature (voir 3.2.2), mais généralement trés éloignée de l'équilibre initial Z_{eq} (simulation 4).

- $w_l\, A^t - p\, b^t < 0$, l'entreprise s'enrichit à chaque itération et F diverge vers l'infini (simulation 5). C'est le "scénario" inverse du précédent.

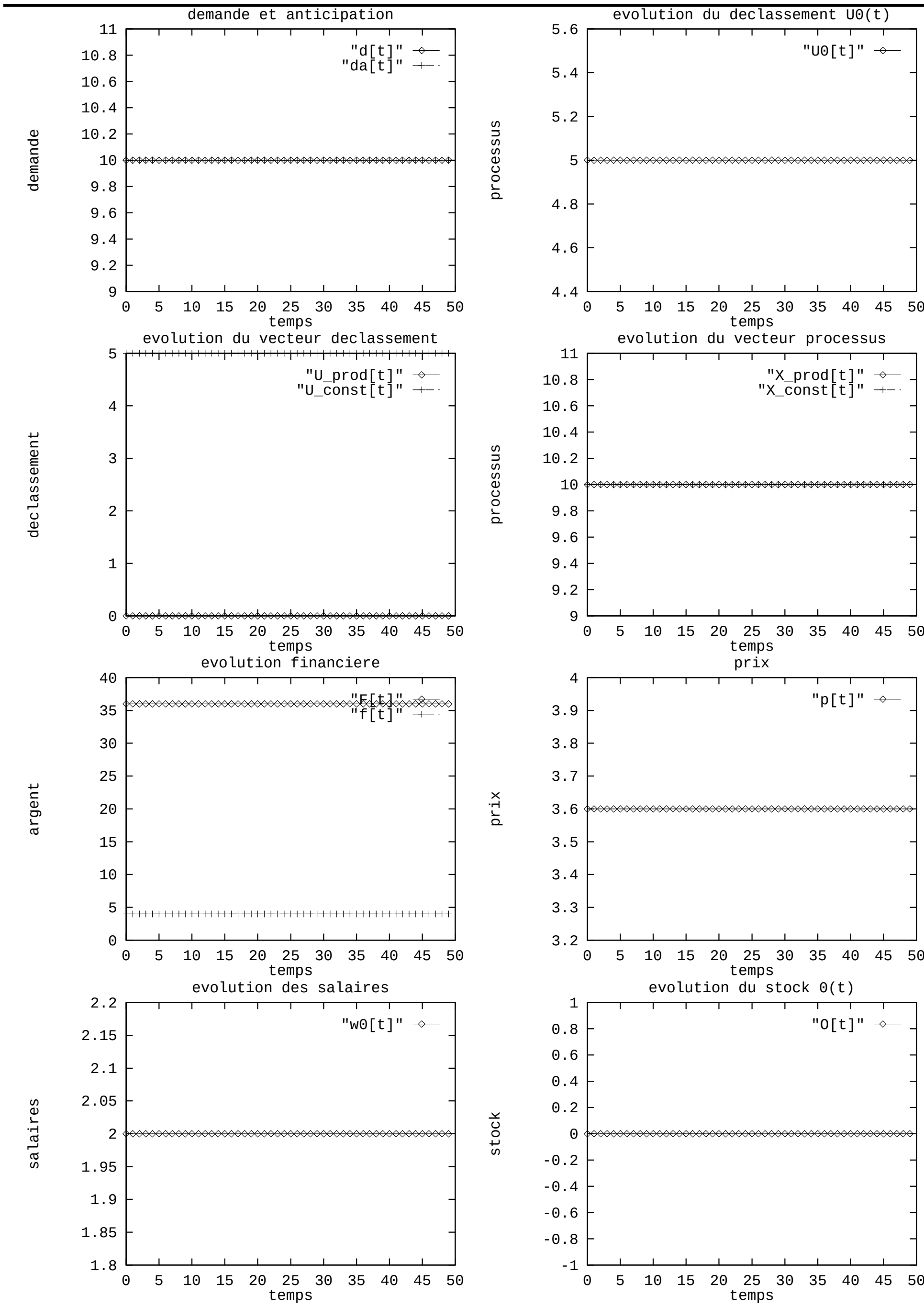
- $w_l\, A^t - p\, b^t = 0$. Réduit à $\{p = p_{eq}\,,\ \psi = \psi_{eq}\}$, le système est localement stable (simulation 6).

Les résultats du théorème 3 donnent lieu aux simulations 7 (stabilité locale sous la condition $|1 - \nu\,\theta| < 1$) et 8 (instabilité locale sous la condition $|1 - \nu\,\theta| > 1$).



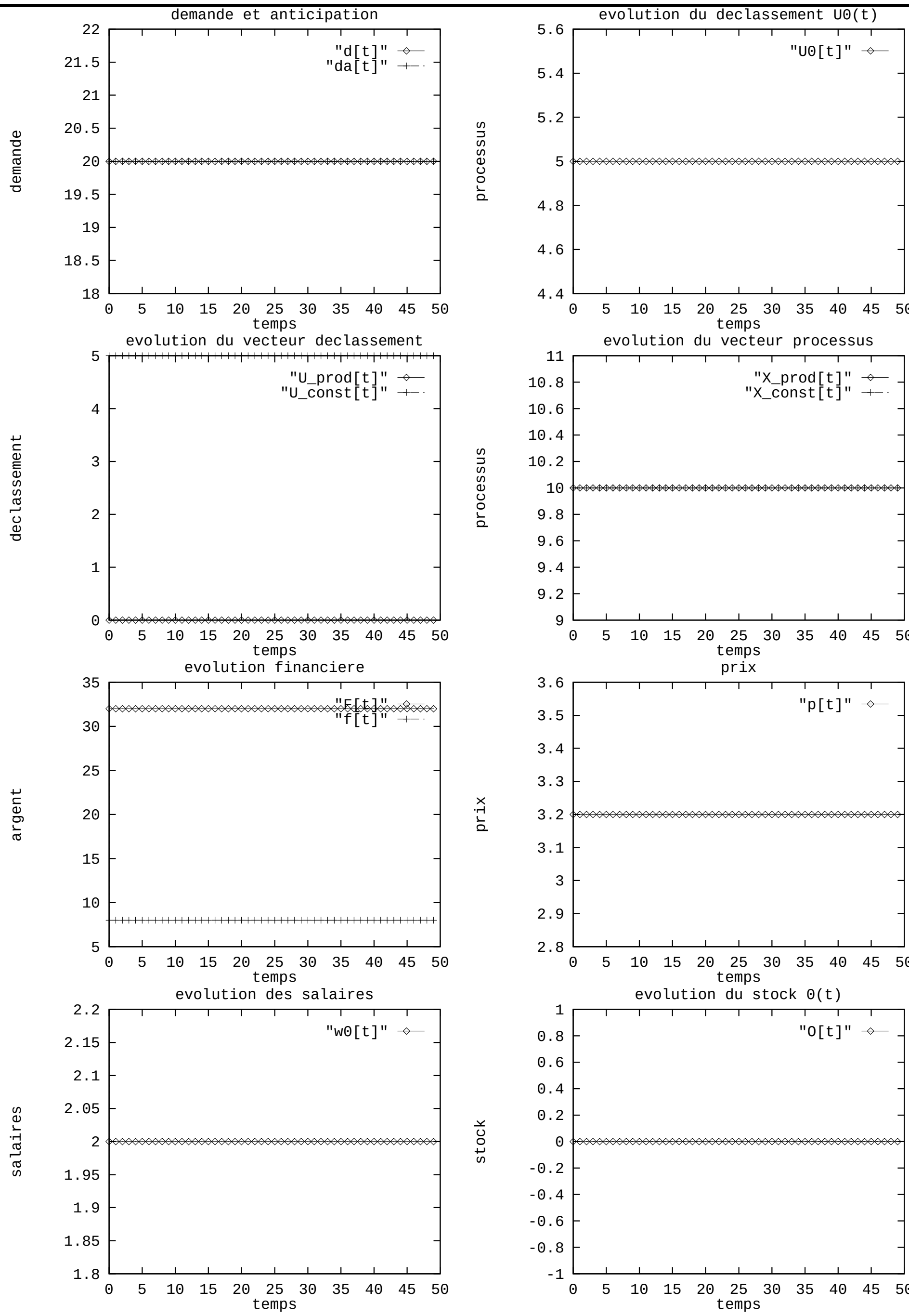
Position d'équilibre à financement externe nul

FIG. 3.1 - *simulation 1*, $f = 0$



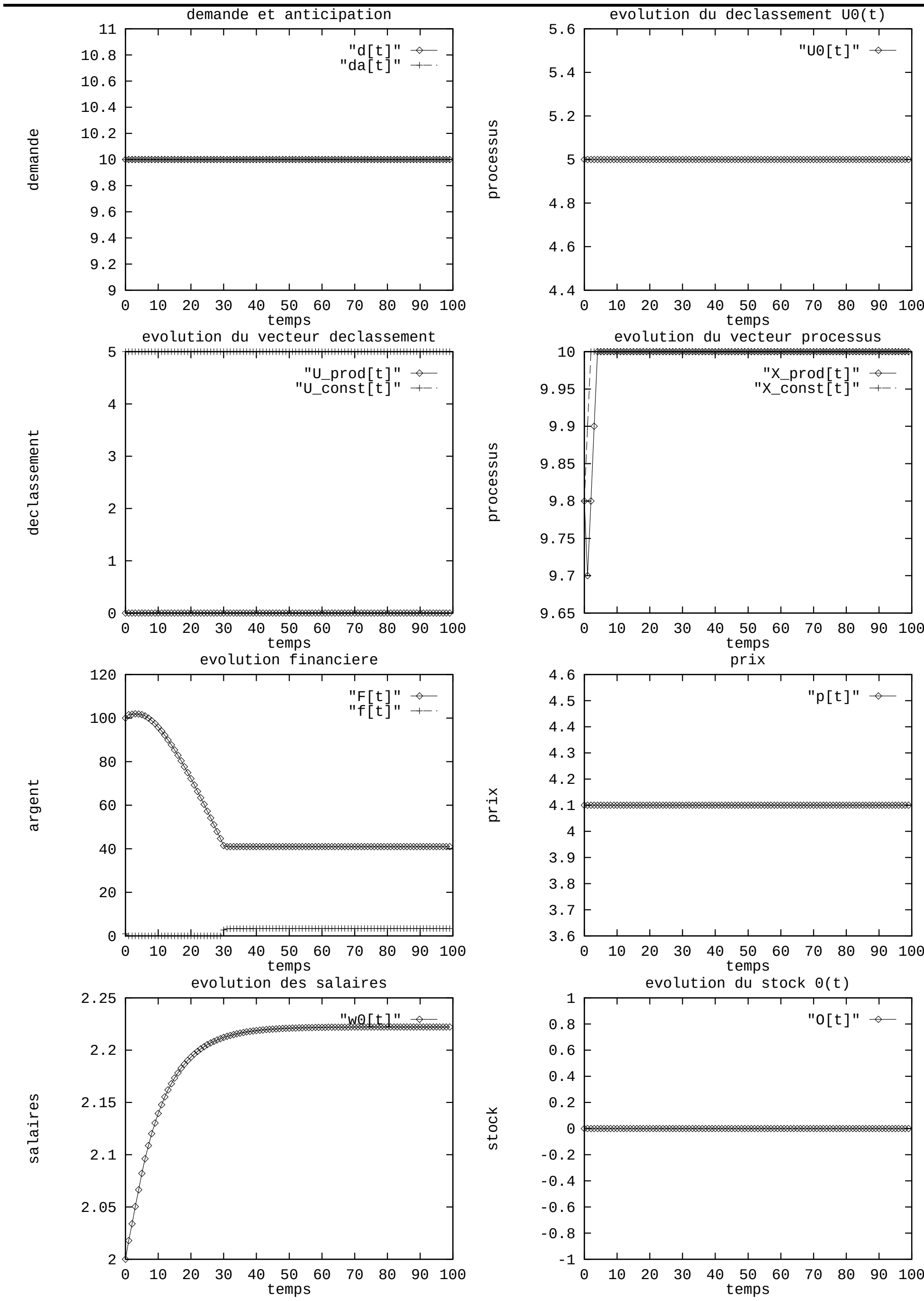
Position d'équilibre à financement externe non nul et non saturé

FIG. 3.2 - *simulation 2*, $0 < f < k\,F$



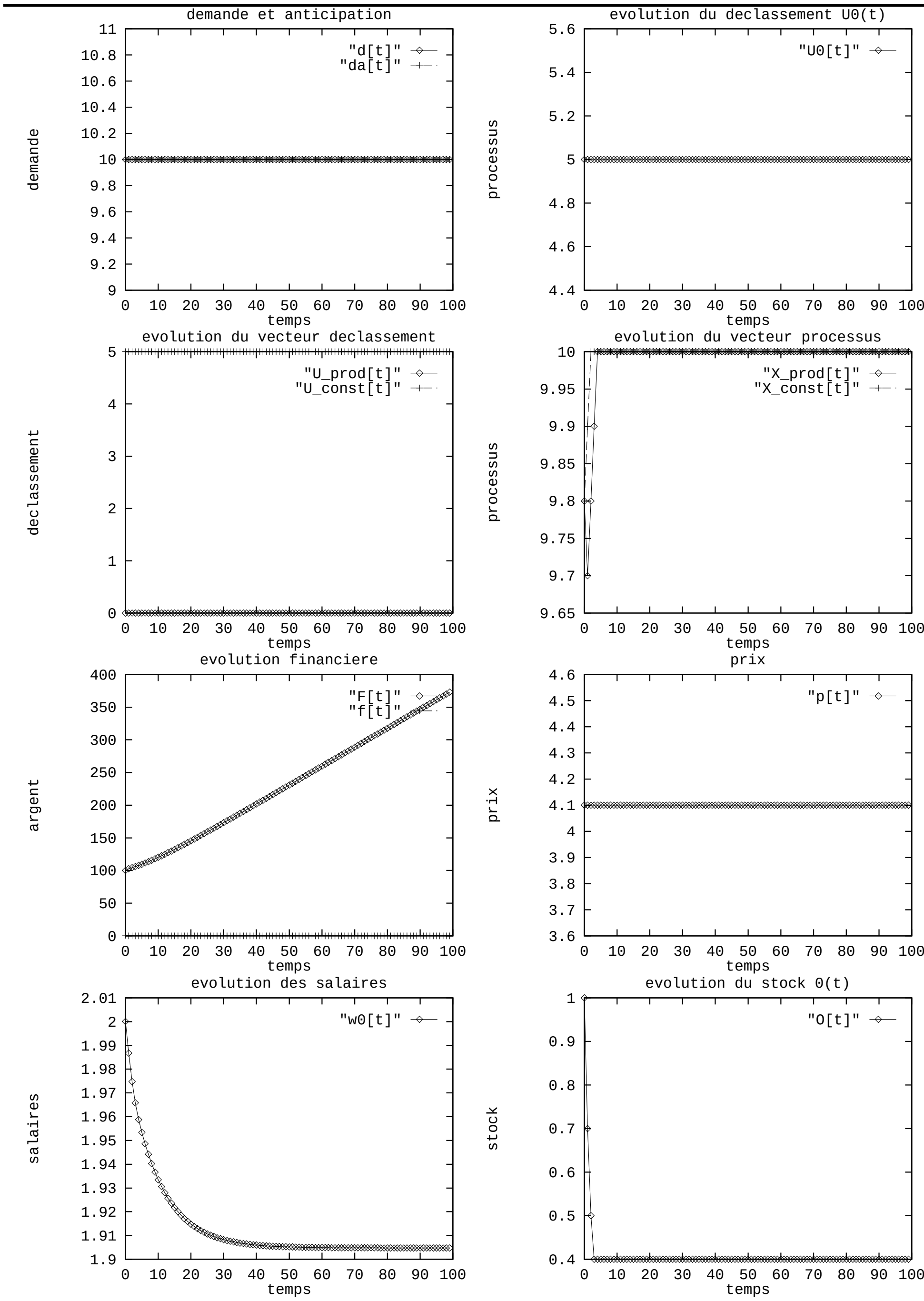
Position d'équilibre à financement externe saturé

FIG. 3.3 - *simulation 3*, $f = k\,F$



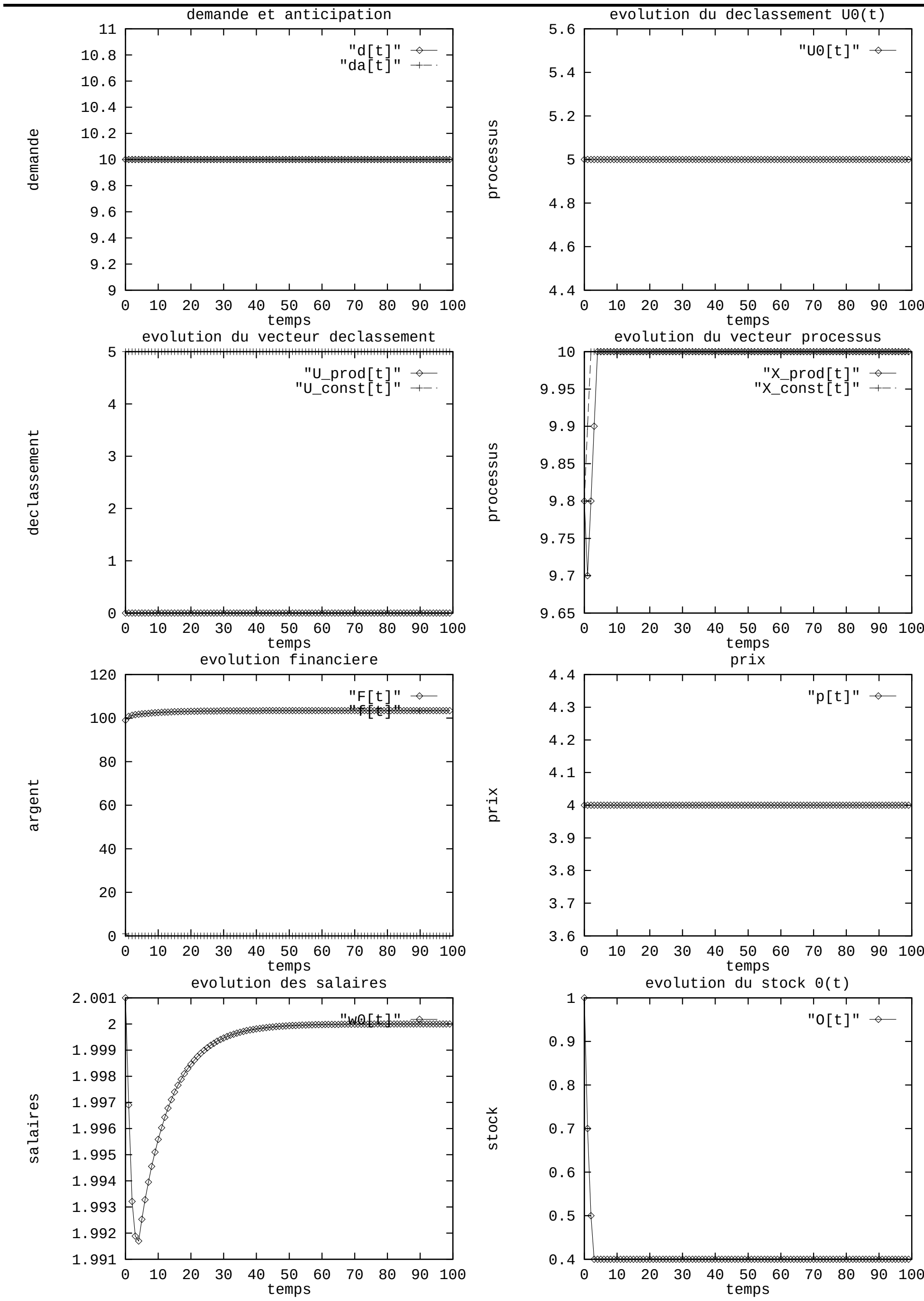
Instabilité d'une position d'équilibre à financement externe nul

FIG. 3.4 - *simulation 4*



Instabilité d'une position d'équilibre à financement externe nul

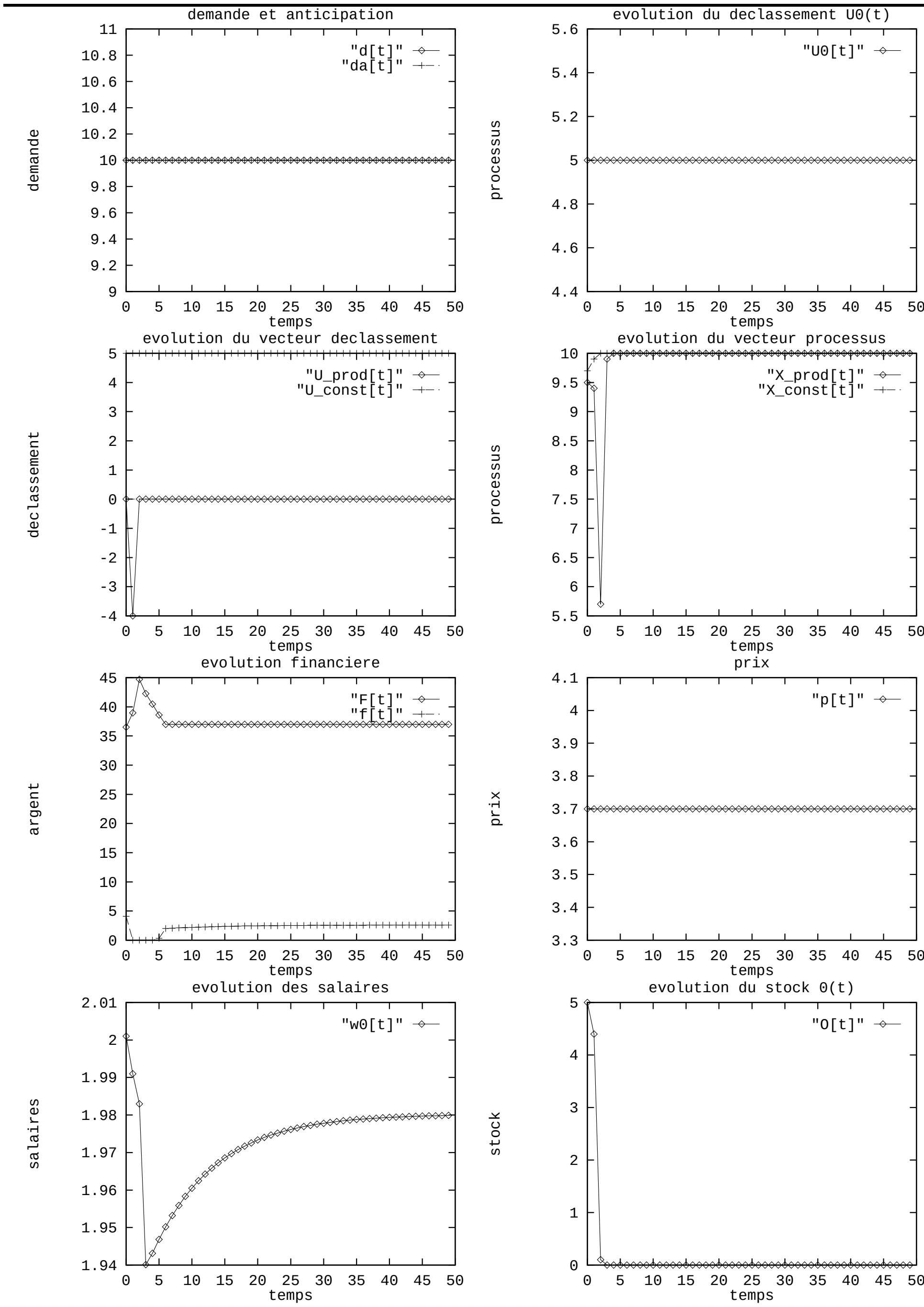
FIG. 3.5 - *simulation 5*



Stabilité d'une position d'équilibre à financement externe nul

dans les directions $\psi(t)$ et $p(t)$ constants

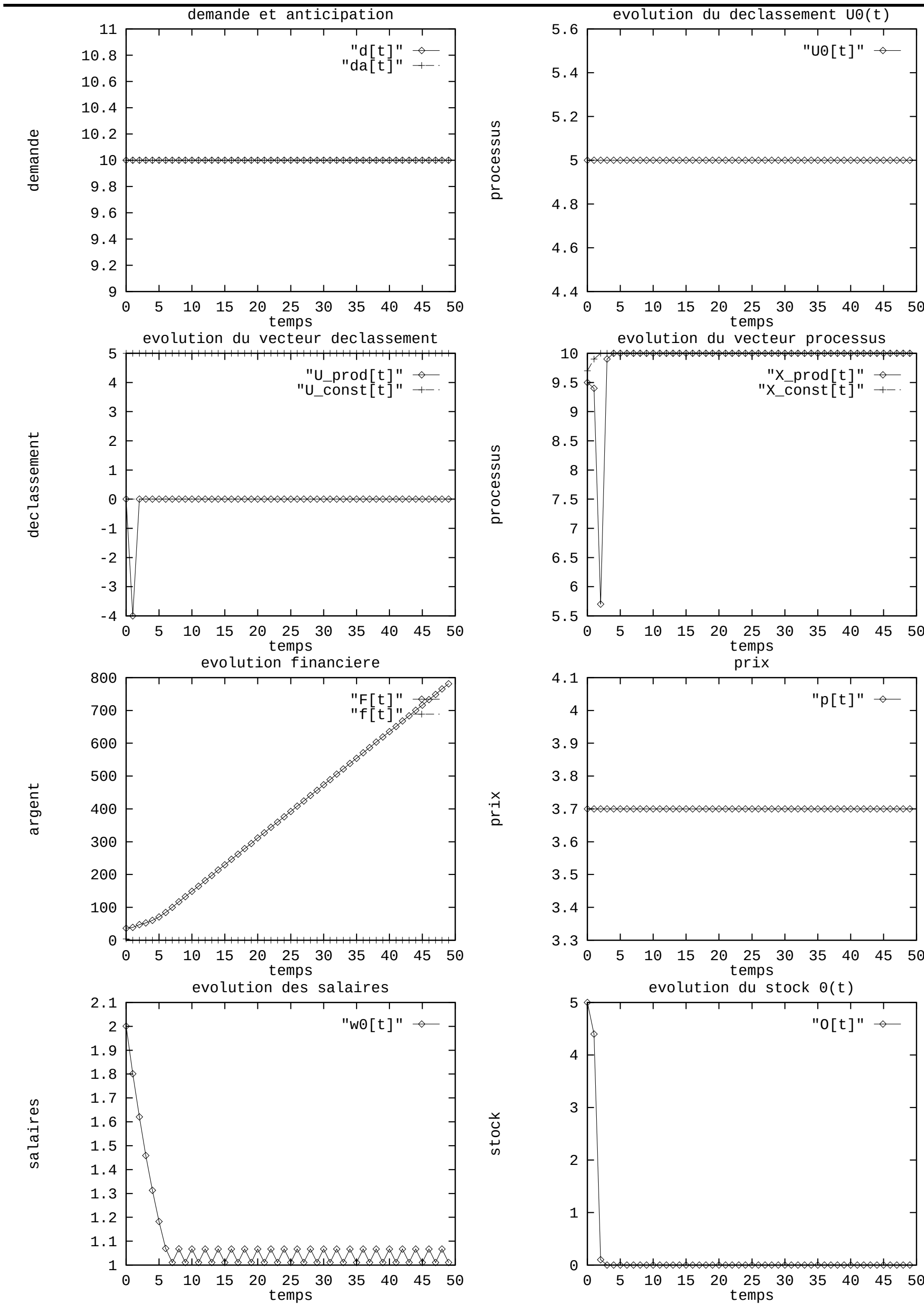
FIG. 3.6 - *simulation 6*



Stabilite d'une position d'équilibre à financement externe non nul

et non saturé sous la condition $|1 - \nu\,\theta| < 1$

FIG. 3.7 - *simulation 7*



Stabilite d'une position d'équilibre à financement externe non nul

et non saturé sous la condition $|1-\nu\,\theta|>1$

FIG. 3.8 - *simulation 8*

Chapitre 4

Le comportement de la firme hors de l'équilibre.

L'étude des positions d'équilibre du système révèle assez logiquement que ces dernières sont fonction —pour une demande donnée constante— de la taille du marché du travail et des fonds dont dispose l'entreprise au début de chaque période. L'examen des conditions de stabilité de tels équilibres a permi, par ailleurs, de souligner le rôle essentiel joué par le financement externe sur le comportement de l'entreprise : à financement externe nul le système est instable; l'accès au financement externe stabilise le système sous la condition

$$|1 - \nu\theta| \ < \ 1 \ .$$

La stabilité de l'équilibre apparaît également comme étant étroitement liée aux spécificités salariales et productives de l'entreprise.
Toutefois on aura pu noter que ces positions d'équilibre sont caractérisées par un vecteur des processus constant et à composantes égales, un stock nul et une production satisfaisant la demande (à l'exception des cas de financement externe saturé). Les situations économiques qui sont ici décrites sont ainsi des situations de régime permanent pour lesquelles la prise en compte de la dimension temporelle du processus de production est inessentielle.
Or, le modèle proposé est destiné à rendre compte de comportements de déséquilibre, en dehors de régime permanent; les simulations réalisées pour de telles situations ont permis de dégager un certain nombre de résultats dans la perspective de la validation du modèle.

4.1 L'entreprise face à son environnement : quelques résultats issus de simulations

Les premières simulations réalisées ont pour objet de valider le modèle dans des contextes économiques dits de croissance régulière (simulation 11 par exemple). Lorsque le taux de croissance de la demande est régulier, la demande anticipée d^* se "cale" pour se confondre avec la demande de marché $d(t)$ et l'entreprise ajuste —moyennant un retard— sa capacité de production en augmentant —d'une période sur l'autre— le nombre de processus de production mis en chantier $u_0(t)$ de manière à ce que le taux de croissance de cette capacité de production —profil des $X_{prod}(t)$ et $X_{const}(t)$— suive celui du marché. La part de marché de l'entreprise —$\sigma(t)$— croit alors au même rythme que la demande. On remarquera que la croissance du marché s'accompagne d'une pénurie de main d'oeuvre qui entraîne une hausse des salaires $w_0(t)$ de telle sorte que l'entreprise est obligée de recourir à des financements externes $f(t)$ pour répondre à la croissance. Lorsque le financement externe est saturé, on constate un début de fléchissement du profil de la courbe des investissements $u_0(t)$.

Quand l'entreprise est confrontée à un marché en décroissance régulière (simulation 12) on peut vérifier que le contrôleur, tout en déclassant des processus productifs $U_{prod}(t)$, diminue d'une période sur l'autre le nombre de processus mis en chantier de manière à ajuster sa capacité de production à la baisse de la demande. Cette politique combinée à une diminution des salaires —excédent de main d'oeuvre— garanti la pérennité de l'entreprise.

Une seconde série de simulation est consacrée à l'étude des sentiers d'adaptation suivis par des entreprises soumises à des ruptures de leur environnement de marché.

Ainsi, la simulation 13 permet de visualiser le processus d'adaptation d'une entreprise qui fait face à une modification subite et radicale de son environnement de marché —baisse brutale du niveau de la demande— suivie d'un retour à la croissance. L'entreprise réagit avec une période de retard, provoquant une accumulation de stocks non désirés et une dégradation de sa situation financière $F(t)$, qui l'oblige à recourir momentanément au financement externe afin de ne pas démanteler son appareil productif. Cette règle de gestion permet à l'entreprise de retrouver rapidement un régime de croissance régulière —une

fois le choc passé— en maintenant un profil harmonieux entre les processus qui sont en cours de développement et ceux qui sont utilisés. Une entreprise "snatcher", i.e. rappelons le davantage guidée par la recherche d'une rentabilité immédiate, confrontée à une situation identique aurait commencé par déclasser les processus en cours de construction —qui coûtent sans rapporter— de manière à ne pas recourir au financement externe. Une telle politique qui se justifie pleinement dans le cadre d'un comportement "snatcher" aurait ici conduit l'entreprise à supporter un deuxième choc —celui de la reprise de la croissance.
Les simulations 14 et 15 présentent une situation de marché caractérisée par une augmentation subite de la demande adressée à la firme suivie d'une décroissance régulière de cette même demande. On pourra à nouveau noter que le contrôleur prend des décisions qui visent à minimiser les distorsions entre les profils des courbes relatives aux processus en phase de production et d'utilisation.
La simulation 16 permet d'analyser les effets d'une augmentation de la fréquence des chocs subis par la firme sur la nature des décisions prises par cette dernière. La viabilité des sentiers d'adaptation est vérifiée malgré l'augmentation de l'importance et de la fréquence des chocs.

4.2 L'influence du taux d'endettement

Les nombreuses simulations que nous avons réalisées nous ont permi d'une part de dresser une cartographie des intervalles de variation des principaux paramètres du modèle[1] et d'autre part de mesurer l'importance du rôle joué par le

1. Toute cartographie des paramètres ne peut avoir de réelle signification que par rapport à un ordre de grandeur particulier des données initiales. Lorsque ces derniéres ont un ordre de grandeur proche de celui des simulations que nous avons réalisées, les valeurs réalistes des paramètres sont :

$$K \in [0, 0{,}75], \quad \nu \in [0, 0{,}9], \quad \theta \in [0, 5].$$

Pour certaines valeurs de K ou de ν, il peut apparaître des phénomènes d'oscillation du système qui n'ont aucune signification économique. Les simulation 17 et 18 en sont des exemples. Pour la simulation 17 ce phénomène est lié à la valeur trop grande de K qui entraine une sur-réaction du prix dés que se produit un changement de la demande. Ces variations de prix entrainent à leur tour d'importantes erreurs d'anticipation de la demande taux d'endettement sur les sentiers d'adaptation suivis, tout particulièrement pour des marchés fortement instables [2].

La prise en considération du rôle joué par le taux d'endettement implique de déterminer s'il est plus judicieux pour la firme de s'adapter immédiatement et complètement aux variations du marché ou s'il n'est pas préférable, dans le cas d'une entreprise soumise à une succession de chocs, de choisir un sentier impliquant des ajustements moins drastiques de sa capacité productive, compte tenu de l'éventualité d'un nouveau changement de marché. Comme cela a déjà été expliqué, le contrôleur mis en place a pour objectif, via la détermination d'une valeur pour u_0, de s'adapter immédiatement et complètement aux conditions de marché telles qu'elles se présentent à un moment donné, à moins qu'il ne soit contraint au niveau du financement de ses investissements. Un taux d'endettement élevé permet donc à l'entreprise de s'adapter immédiatement et complètement alors qu'un taux plus faible peut l'obliger à prendre des décisions moins drastiques.

On remarquera toutefois qu'il existe un seuil au delà duquel l'augmentation du taux d'endettement de l'entreprise est sans conséquence à la fois sur le comportement et les résultats de l'entreprise. On notera ensuite que le libre accès au financement, qui permet que soit réalisée la totalité des décisions d'investissement prises par le contrôleur, n'est pas forcément la garantie d'un sentier supérieur.

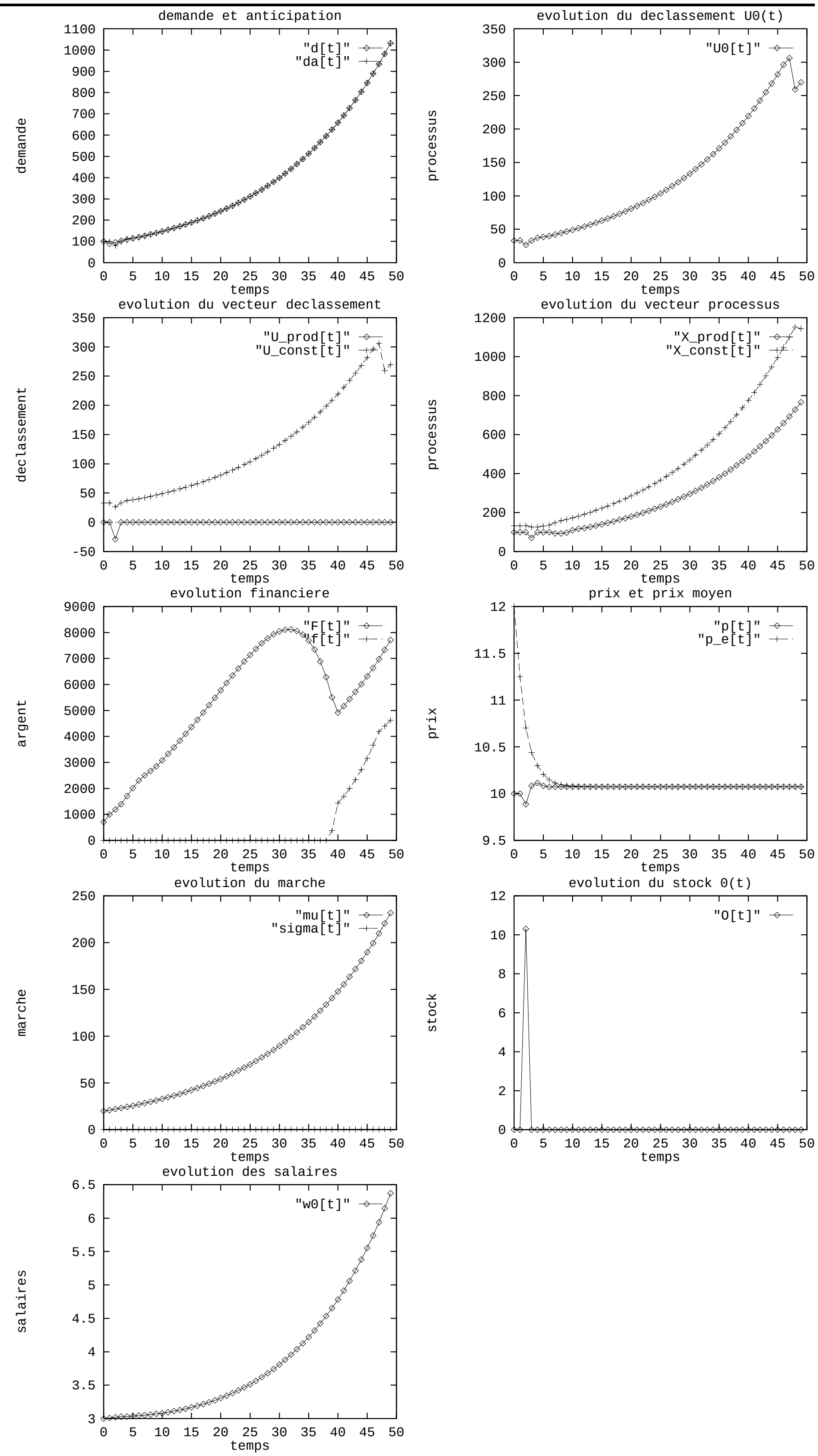
Lorsque le taux d'endettement est élevé le contrôleur dispose de toute la latitude pour maintenir un profil des $u_0(t)$ adapté au profil de la demande, répercutant ainsi sur la structure de la capacité productive les nombreux chocs qui se produisent au niveau de la demande. Pour l'entreprise cela se traduit par de nombreux déclassements des processus en production, un niveau de stock élevé et un bilan financier —différence entre $F(t)$ et $f(t)$— quelquefois critique.

Lorsque le taux d'endettement autorisé est moins élevé, il n'est plus possible de maintenir un profil des $u_0(t)$ comparable à celui de la demande ce qui revient à considérer que l'entreprise devient moins sensible aux variations de la demande. La conséquence en est que l'entreprise considérée déclasse relativement moins

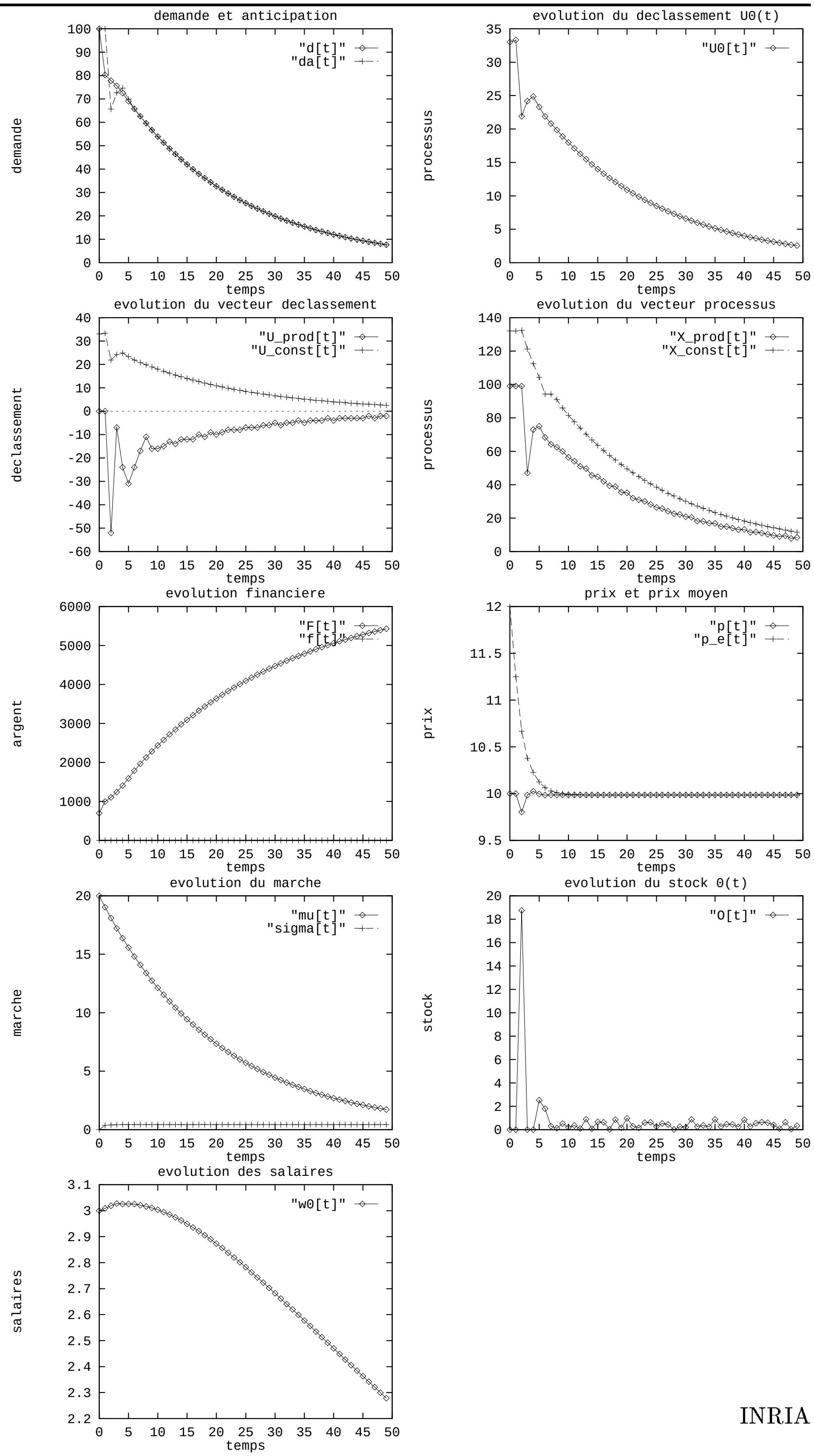
et la répétition de ces variations provoque l'oscillation du système. Pour la simulation 18, c'est la valeur donnée à ν qui provoque l'oscillation des salaires.

2. Ainsi les simulations 14 et 15 ne diffèrent dans leur données initiales que par les valeurs attribuées au taux d'endettement.

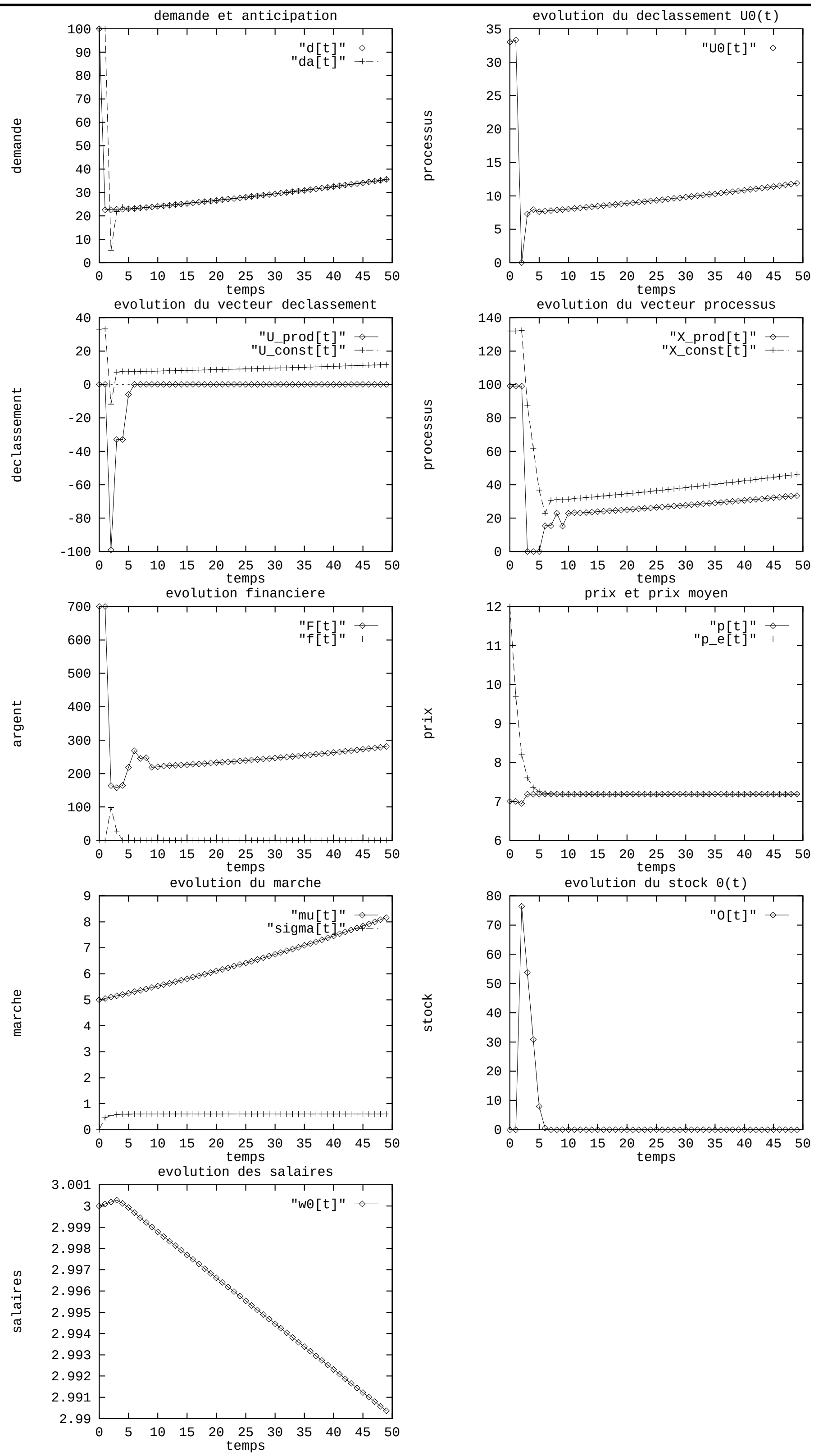
de processus productifs, les stocks se réduisent et le bilan financier est plus satisfaisant.
Ces observations qui ont pu être vérifiées sur de nombreuses simulations laissent à penser que dans le cas de chocs sur la demande très fréquents, il est préférable de ne pas ajuster drastiquement la capacité de production.



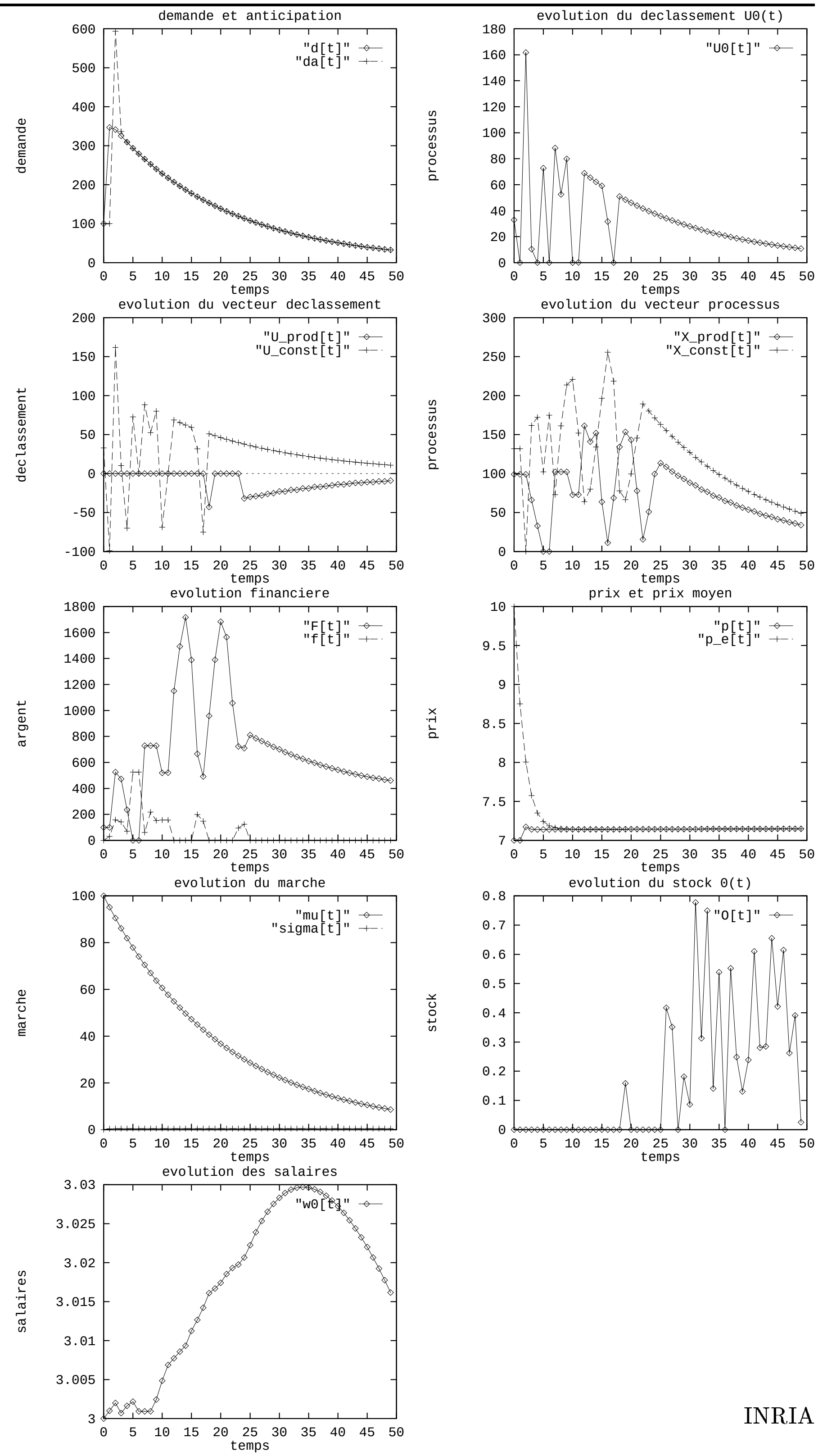
simulation 11



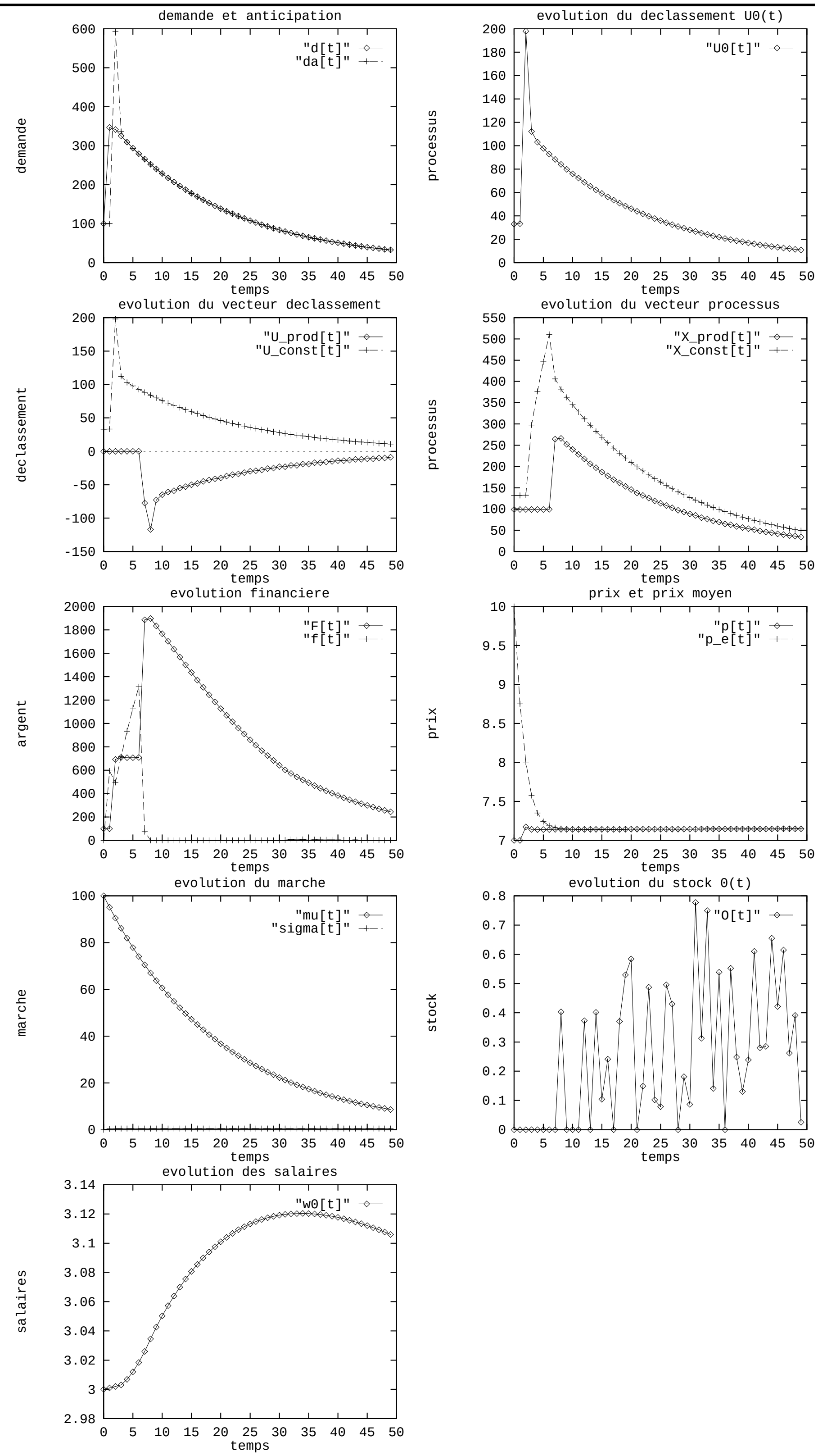
simulation 12



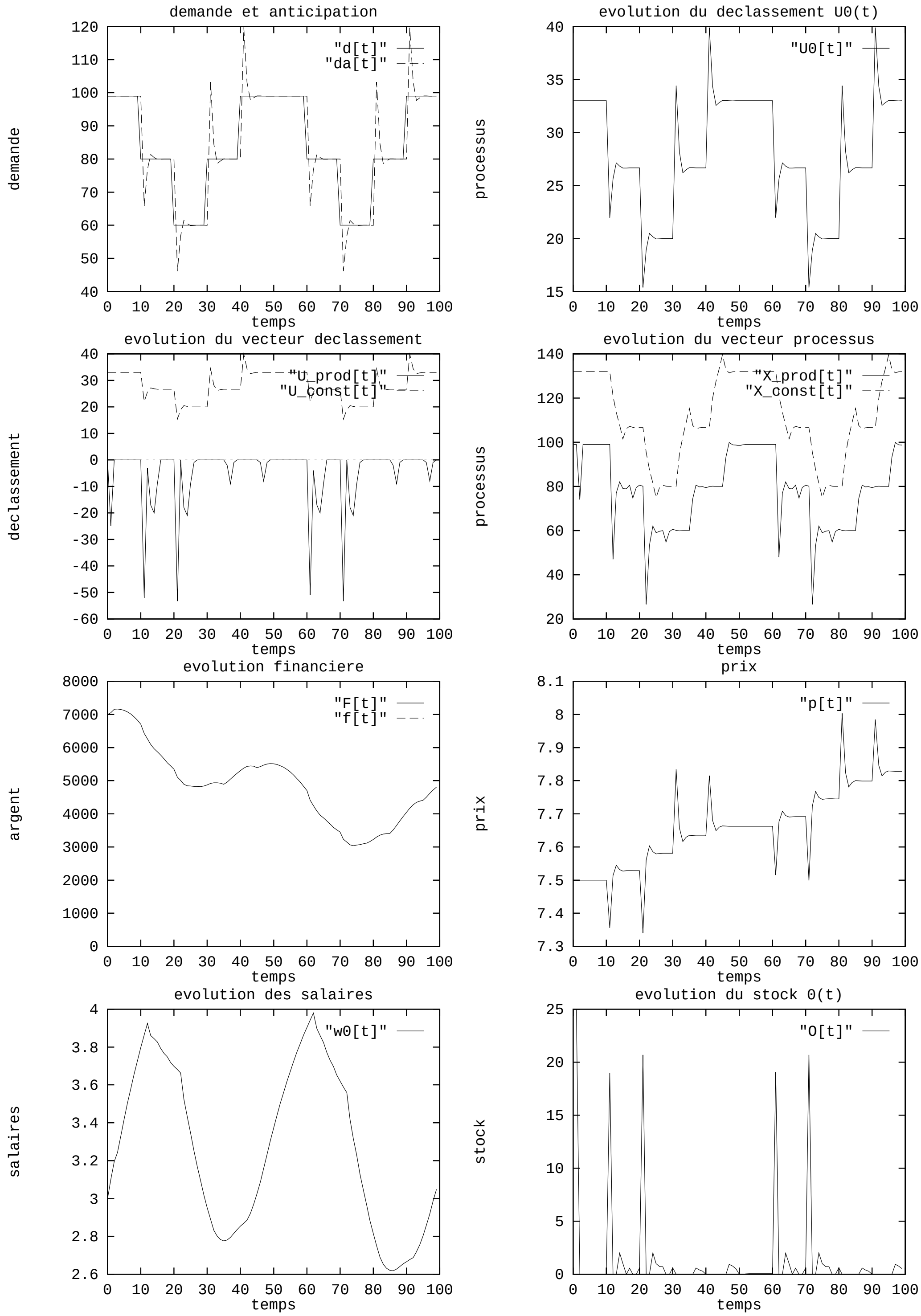
simulation 13



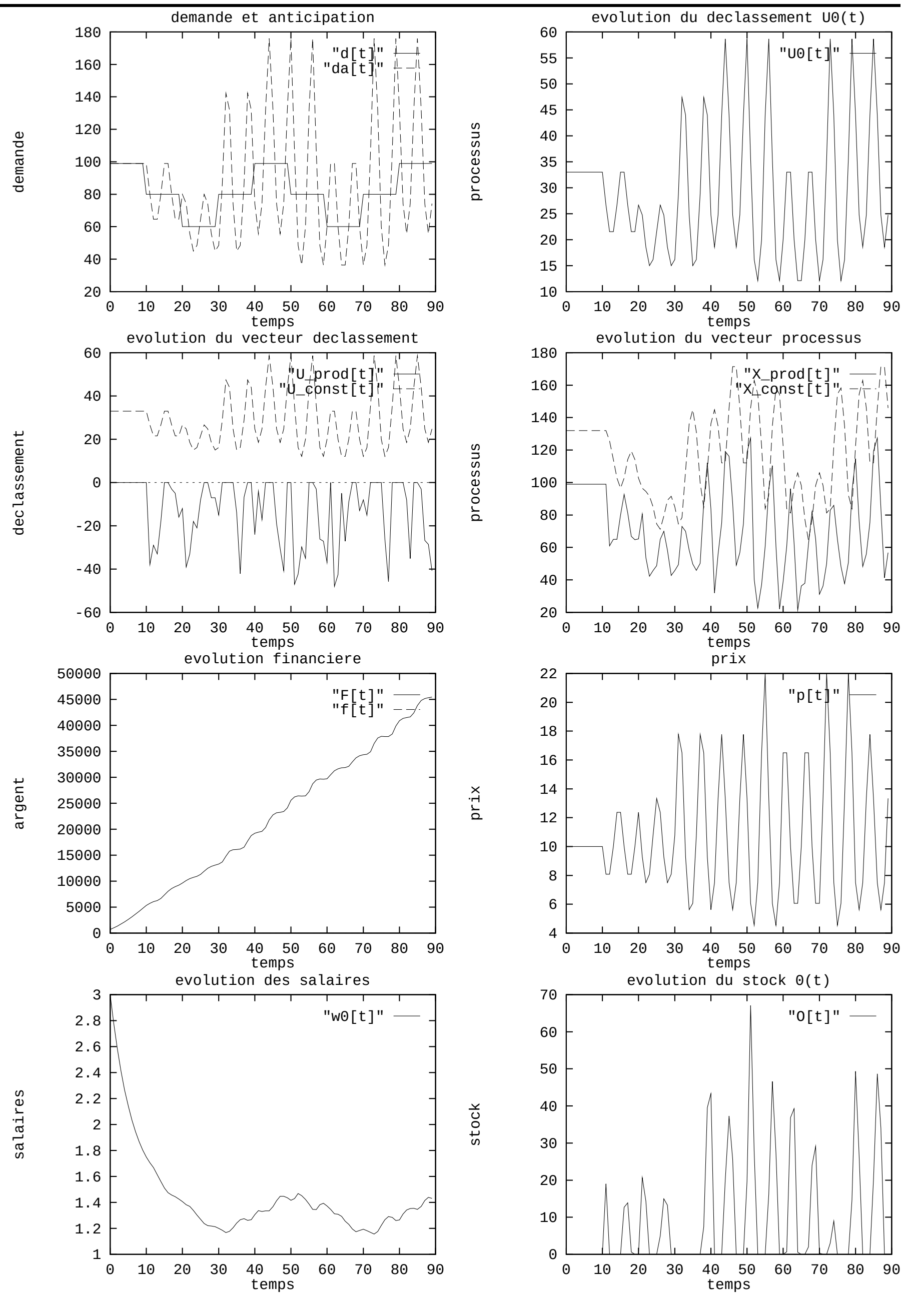
simulation 14



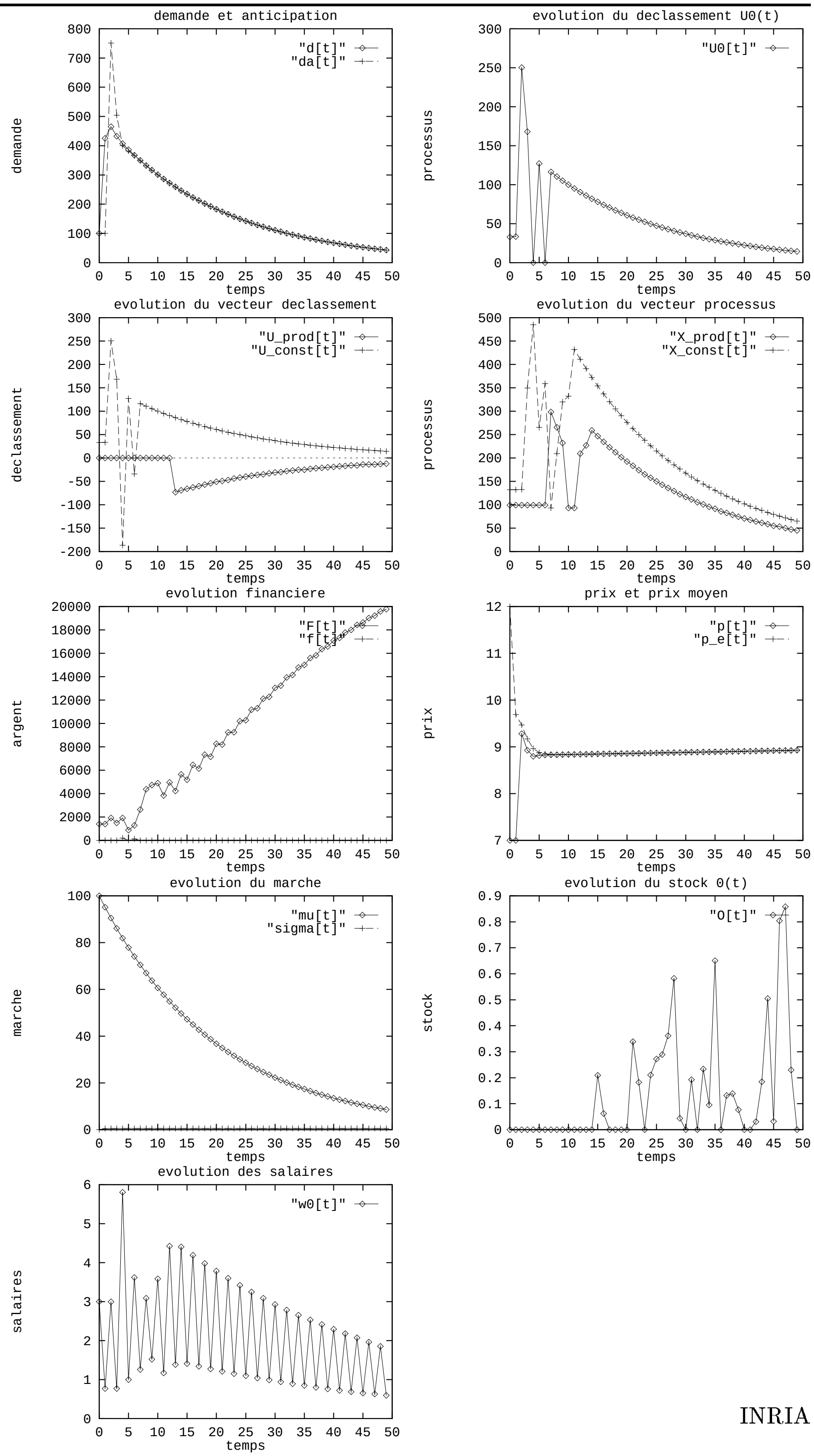
simulation 15



simulation 16



simulation 17



simulation 18

Chapitre 5

Les enjeux d'un développement du modèle de base

Les conclusions et implications que nous tirons de cette première étape de notre recherche sont de trois ordres.
Premièrement, il apparaît assez clairement que le modèle est susceptible de traiter d'un grand nombre de situations économiques: de régimes réguliers et hors de régimes réguliers. *Le modèle est validé pour un éventail de spécifications de marché et de comportements d'entreprise relativement large.*
Deuxièmement, les résultats présentés décrivent déjà *des sentiers d'adaptation —hors de l'équilibre— réussie* i.e. des sentiers qui tout en respectant les conditions de viabilité de courte période de l'entreprise, ne compromettent pas celles de longue période (étant donné une contrainte temporelle pour la production).
Troisièmement, et par conséquent, cette première étape permet que soit envisagée *l'exploration de sentiers d'adaptation plus complexes* i.e. intégrant (i) la prise en considération explicite de relation de sous-traitance, (ii) l'étude des relations horizontales et des comportements stratégiques entre les entreprises, (iii) la possibilité de commander le système entreprise par le biais de variables de commande jusqu'ici neutralisées telles que les commandes sur les stocks et sur les mises en sommeil.
C'est dans cette perspective que nous proposons une généralisation du modèle de base selon deux directions : (i) le passage d'une structure monoproductrice

à une structure biproductrice, et (ii) l'introduction d'une deuxième entreprise également bi-productrice.

5.1 Généralisation du modèle

Les équations d'état d'une entreprise

Lorsque l'on passe de la mono-production à la bi-production les équations d'état de chaque entreprise deviennent :

$$
\begin{aligned}
X_i(t+1) &= \mathcal{A}_i\, X_i(t) + U_i(t)\,,\\
F(t+1) &= F(t) + f(t) - \sum_{i=1}^{2} w_i^t(t)\, A_i^t\, D_{1\,i}(t)\,(\mathcal{A}_i\, X_i(t) + U_i(t))\\
&\quad + p(t)\,\min(d(t), \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(t)\, O_i(t) + b_i^t\, D_{2\,i}(t)\,(\mathcal{A}_i\, X_i(t) + U_i(t)))\,,\\
O_i(t+1) &= O_i(t) + b_i^t\, D_{2\,i}(t)\,(\mathcal{A}_i\, X_i(t) + U_i(t))\\
&\quad - \frac{1}{2}\min(d(t), \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(t)\, O_i(t) + b_i^t\, D_{2\,i}(t)\,(\mathcal{A}_i\, X_i(t) + U_i(t)))\,,
\end{aligned}
$$

où $i = 1, 2$ est un indice relatif à l'un des produits de chaque firme. On associe à chaque produit une matrice technologique A_i, un vecteur des salaires $w_i(t)$, une capacité de production $X_i(t)$ et un vecteur des outputs b_i spécifique.

Le marché

Le système de marché modélise la demande adressée aux deux firmes, notée $d(t)$. Celle ci est calculée à partir des quatre grandeurs $(\mu, p_e, \phi_i, \sigma_i)$ où :

- $\mu(t)$ représente la taille du marché pour la période $t+1$,
- $p_e(t)$ représente le prix moyen du produit sur le marché pendant la période $t+1$,
- $\phi_i(t)$ représente la part de marché de l'entreprise i pendant la période $t+1$,

- $\sigma_i(t)$ représente la part de marché de l'entreprise i en pourcentage pendant la période $t+1$.

La demande est déterminée à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
d(t) &= \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(t)\, \mu(t)\, p_e(t)^{\beta}\,, \\
\mu(t) &= e^{\gamma}\, \mu(t-1)\,, \\
p_e(t) &= \sum_{i=1}^{2} \sigma_i(t)\, p_i(t) + \sum_{i=1}^{2} (1-\sigma_i(t))\, \frac{p_e(t-1)^{1+\tau}}{p_e(t-2)^{\tau}}\,, \\
\phi_i(t) &= \phi_i(t-1)\, \frac{p_e(t-1)}{p_i(t-1)}\,, \\
\sigma_1(t) &= \epsilon_1\, \frac{\phi_1(t)}{1+\phi_1(t)}\,, \\
\sigma_2(t) &= \epsilon_2\, \frac{\phi_2(t)}{1+\phi_2(t)}\,,
\end{aligned}$$

avec la contrainte $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 1$.

5.1.1 Quelques perspectives

Ces extensions du modèle de base devraient permettre d'étudier la variété des stratégies d'entreprise dans des situations de déséquilibre.
L'idée étant d'identifier les trajectoires —sentiers d'adaptation— en fonction de différents contextes institutionnels —contrainte de financement externe, évolution des salaires et des prix...— d'entreprises soumises d'une part à des complémentarités temporelles de leur processus de production et/ou d'autre part à des activités productives et des investissements *a priori* concurrents (RICHARDSON,1960).
Dans le cas où les deux firmes réalisent des investissements concurrents — produits substituables— les trajectoires suivies par chacune d'entre elles dépendent d'une part, des règles de comportement adoptées par les deux — concurrence, coopération, accord sur le prix, accord de licence...— et d'autre part de la nature des contextes institutionnels et concurrentiels. On devrait alors pouvoir vérifier, par exemple, que la coopération (en construction et en

utilisation) représente une forme d'organisation de la production efficace dans des environnements économiques changeant (i.e. caractérisés par une demande instable et un ratio n/N relativement élevé).
Dans l'état actuel de la modélisation, on pourrait envisager de construire de nouveaux profils de commande —contrôleur— qui traduiraient cette diversité de comportements.
Pour ce qui concerne la prise en compte des relations de complémentarités, il s'agirait par exemple d'étudier les conditions de viabilité, sous différents arrangements institutionnels (d'accès au financement externe et au marché du travail), de deux firmes produisant chacune deux produits finals complémentaires de telle sorte que le prix de la marchandise écoulée par l'une des deux firmes est une fonction croissante de la quantité produite par l'autre firme.
On peut aussi envisager ici le cas de deux entreprises en relation verticale client-fournisseur, le montant des paiements externes $T(t)$ étant alors dédié à l'achat d'*inputs complémentaires*. Ces inputs seraient déterminés comme une part fixe du volume du produit final, leur prix étant fixé sur le principe de la coopération-négociation (AOKI,1988) [1]. On pourrait alors par exemple, examiner l'évolution de la part de marché d'un fournisseur compte tenu d'éventuelles distorsions temporelles liées à des fluctuations des recettes et/ou du choix de mécanismes alternatifs de contrôle du financement. On devrait également être en mesure d'analyser les effets pour le client des changements auxquels serait soumis le fournisseur (innovation, accroissement de la concurrence...).

1. La séquence des décisions pourrait être la suivante : détermination du volume de l'offre en produit final, détermination du volume d'inputs et du prix, calcul du prélèvement associé $T(t)$, fixation du fond des salaires.

Bibliographie

d'ANDREA–NOVEL B., COHEN DE LARA M. (1993) : *Commande linéaire des systèmes dynamiques*, Masson, Paris.

AOKI M. (1988) : *Information, Incentives and Bargaining in the Japanese Economy*, Cambridge University Press, Cambridge.

BATTEN D., CASTI J., JOHANSSON B. (ed) (1987) : *Economic Evolution and Structural Adjustment*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.

CARLSSON B. (1989) : Industrial Dynamics: An Overview, in B.CARLSSON ed. (1989).

CARLSSON B. (1993) : Industrial Dynamics: A Framework for Analysis of Industrial Transformation, *Revue d'Economie Industrielle*, n°61, 3^{me} Trimestre.

CARLSSON B. (ed.) (1989) : *Industrial Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London.

DAY R.H. (1975) : Adaptative Process and Economic Theory, in *Adaptative economic models*, Academic Press, London.

DAY R.H. (1987) : The General Theory of Disequilibrium Economics and Economic Evolution, in BATTEN D., CASTI J., JOHANSSON B. (ed) : *Economic Evolution and Structural Adjustment*, Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.

DAY R.H. (1993) : “Evolution in economic processes: introductory remarks”, *Structural Change and Economic Dynamics*, vol.4, n°1.

GEORGESCU-ROEGEN N. (1970) : “The economics of production”, *The American Economic Review*, may.

GEORGESCU-ROEGEN N. (1971) : *The Entropy Law and the Economic Process*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.

HAYEK F.V. (1937) : "Economics and Knowledge", *Economica*, new sery, repris dans *Individualism and Economic Order*, Routledge & Kegan Paul, London and Henley, 2^{me} édition, 1976 .

HAYEK F.V. (1945) : "The Use of Knowledge in Society" *American Economic Review*, vol.35, repris dans *Individualism and Economic Order*, Routledge & Kegan Paul, London and Henley, 2^{me} édition, 1976.

HICKS J.R. (1954) : "Stickers and Snatchers", *Oxford Economic Papers*, in *Collected Essays on Economic Theory*, B.Blackwell, Oxford, 1982.

HICKS J.R. (1970) : "A Neo-Austrian Growth Theory", *Economic Journal*, june.

HICKS J.R. (1973) : *Capital and Time*, Clarendon Press, Oxford.

LAZONICK W. (1991) : *Business Organization and the Myth of the Market Economy*, Cambridge University Press, Cambridge.

LAZONICK W. (1992) : *The Innovative Business Organization and Transaction Cost Economics*, Department of Economics, Harvard University.

McNULTY P.J. (1984) : "On the nature and theory of economic organization : the role of the firm reconsidered", *History of Political Economy*, 16;2.

RICHARDSON G.B. (1990) : *Information and Investment*, Claredon Press, Oxford, 2^{nd} edition.

SCHUMPETER J.A. (1934) : *The Theory of Economic Development*, réimpression de 1974, Oxford University Press, London, Oxford, New York, trad. française, 1935, *Théorie de l'Evolution Economique*, Librairie Dalloz, Paris.

SCHUMPETER J.A. (1942) : *Capitalism, Socialism and Democraty*, Harper and Row Publishers, New York, trad. française, 1951, *Capitalisme Socialisme et Démocratie*, Payot, Paris.

SMITH A. (1776) : *An inquiry into the nature and the causes of the wealth of nations*, R.Cambell and D.Skinner ed.(1976), Clarendon Press, Oxford, trad. française coll. Idées, Gallimard, 1976.

WICKSELL K. (1935) : *Lectures on political economy*, Routledge and Kegan Paul Ltd, Londres.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399